

## 数列复习要注意什么

北京市第一六二中学教师 吕希

数列这一章,相对于其他章节,考生会感觉比较简单。首先,这部分知识内容条理比较清晰,即在理解数列的概念基础上,理解等差数列、等比数列的概念,掌握等差数列、等比数列的通项公式和前项和公式;其次,以往北京高考对本章的考查难度不高,考查分值在10分至20分之间。既然这部分知识并不难,那么考生复习中要注意哪些方面呢?

## 一、“理解基本概念、掌握基本方法”要落实

数列部分知识点不多,也容易形成体系,所以理解概念、体会方法的本质就是本章复习的重要方面。

比如,提到等比数列,考生头脑中有哪些相关内容呢?定义、通项公式、等比中项、求和公式……仅仅知道这些是不够的。考生真的知道等比数列是什么样的数列吗?

**【例1】**设 $\{a_n\}$ 是公比为 $q$ 的等比数列,则“ $q>1$ ”是“ $\{a_n\}$ 为递增数列”的( )。

- (A)充分且不必要条件  
(B)必要且不充分条件  
(C)充分必要条件  
(D)既不充分也不必要条件

**【参考答案】**选D项。解答本题,考生需要理解数列单调性的概念。试题考查的核心素养是逻辑推理。如等比数列 $-1, -2, -4, \dots$ 的公比大于1,但它不是递增数列;如果一个数列递增,它的公比是否一定大于1呢?不一定,如 $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \dots$ 有的考生找不到反例,就判断它是对的。事实上,要判断一个命题正确,必须加以严谨证明。对于等比数列来说,单调性是由首项 $a_1$ 和公比 $q$ 两个要素共同确定的: $a_{n+1} - a_n = a_1 q^n (q - 1)$ , ( $a_1 \neq 0$ ), 所以当 $\begin{cases} a_1 > 0 \\ q > 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a_1 < 0 \\ 0 < q < 1 \end{cases}$ 时,等比数列单调递增;当 $\begin{cases} a_1 < 0 \\ q > 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a_1 > 0 \\ 0 < q < 1 \end{cases}$ 时,等比数列单调递减;当 $\begin{cases} a_1 \neq 0 \\ q = 1 \end{cases}$ 时,等比数列为常数列;当 $\begin{cases} a_1 \neq 0 \\ q < 0 \end{cases}$ 时,等比数列为摆动数列。

再如,对已知数列前 $n$ 项和 $S_n$ 确定数列的题目,解答一般需要先利用 $a_n = \begin{cases} S_1, n=1 \\ S_n - S_{n-1}, n \geq 2 \end{cases} (n \in \mathbb{N}^*)$ 来确定通项 $a_n$ 。为什么要这么做呢?考生是否会漏掉讨论 $n=1$ 的情况呢?有时还会分不清楚为什么自己不能用 $a_n = S_{n+1} - S_n$ ,认为这样就不用分类讨论。其实,问题的关键在于考生忽略了数列的前 $n$ 项和 $S_n$ 的本质是 $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = S_{n-1} + a_n$ ,其中若 $S_{n-1} = f(n-1)$ 有意义,则 $n-1 \in \mathbb{N}^*$ 。

**【例2】**已知数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和 $S_n$ 满足: $S_n + S_m = S_{n+m}$ ,且 $a_1=1$ 。那么 $a_{10} =$ \_\_\_\_\_。

(A)1 (B)9 (C)10 (D)55

**【参考答案】**选A项。令 $n=1, m=9$ 则 $S_1 = S_{10} - S_9$ ,即 $a_{10} = a_1 = 1$ 。

**【例3】**数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$ ,对所有的 $n \geq 2$ 且 $n \in \mathbb{N}^*$ ,都有 $a_1 a_2 \dots a_n = n^2$ ,则 $a_5 + a_5$ 等于( )。

- (A) $\frac{25}{9}$  (B) $\frac{25}{16}$  (C) $\frac{61}{16}$  (D) $\frac{31}{15}$

**【参考答案】**选C项。

令 $T_n = a_1 a_2 \dots a_n$ ,则 $a_n = \frac{T_n}{T_{n-1}} = \frac{n^2}{(n-1)^2} (n \in \mathbb{N}^*)$ 。

也就是说,考生在复习中,首先要关注问题本身,而不是公式的结果;要重视分析问题,而不只是记住方法;要重视过程反思,而不仅是强化训练。

## 二、“数列是一种特殊的函数”要牢记

函数思想贯穿于高中数学的始终。在其他章节中出现的函数基本上是连续函数,而数列作为一种特殊的函数,是离散函数模型。从函数的观点去看数列,在这种整体的、动态的观点之下使数列的一些性质显现得更加清楚,某些问题也能得到更好的解决。同时,要注意离散型函数与连续函数的差异。

**【例4】**若等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_7 + a_8 + a_9 > 0, a_7 + a_{10} < 0$ ,

则当 $n =$ \_\_\_\_\_时, $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和最大。

**【参考答案】**答案为8。因为等差数列具有单调性,又由已知可得 $a_8 > 0, a_9 < 0$ ,所以该数列单调递减,且前8项为正数,第9项开始为负数,所以前8项和最大。

**【例5】**数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n = n^2 - kn$ ,若数列 $\{a_n\}$ 是递增的,则实数 $k$ 的取值范围是\_\_\_\_\_。

**【参考答案】** $k < 3$ 。这是一道极易出错的题目,因为该数列可以看作二次函数 $f(n) = n^2 - kn$ ,若该函数在 $[1, +\infty)$ 上单调递增,则只需对称轴不大于1即可,于是错解为 $k \leq 2$ 。事实上,该函数在 $[1, +\infty)$ 上并不是连续的,在区间 $[1, 2]$ 上只需满足 $f(1) < f(2)$ 即可,而不需要单调递增,所以由 $\frac{k}{2} < \frac{3}{2}$ 得 $k < 3$ 。

## 三、“数列是考查核心素养的良好载体”莫忽视

数列处在知识交汇点的地位,所蕴含的数学思想方法较为丰富。探索实践、猜想证明、数形结合、多想少算、数学阅读、数学表达与数学应用等,这些思想方法都可以以数列知识为载体很好地体现出来。

**【例6】**已知等差数列 $\{a_n\}$ 单调递增且满足 $a_1 + a_{10} = 4$ ,则 $a_5$ 的取值范围是( )。

- (A)(2,4) (B) $(-\infty, 2)$   
(C)(2,+∞) (D)(4,+∞)

**【参考答案】**选C项。将已知转化为基本量 $a_1$ 和 $d$ ,代入 $a_5 = a_1 + 4d$ ,通过消元即可解决。

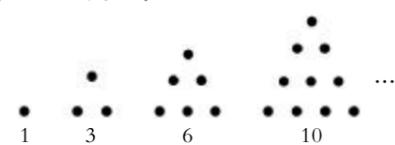
**【例7】**定义“等和数列”:在一个数列中,如果每一项与它的后一项的和都为同一个常数,那么这个数列叫做等和数列,这个常数叫做该数列的公和。

已知数列 $\{a_n\}$ 是等和数列,且 $a_1=2$ ,公和为5,那么 $a_{18}$ 的值为\_\_\_\_\_。这个数列的前 $n$ 项和 $S_n$ 的计算公式为\_\_\_\_\_。

**【参考答案】**3;当 $n$ 为偶数时, $S_n = \frac{5}{2}n$ ;当 $n$ 为奇数时, $S_n = \frac{5}{2}n - \frac{1}{2}$ 。

本题主要考查数列的基本概念,考查考生综合应用所学数学知识选择有效的方法和手段对新颖的信息、情景和设问进行独立的思考与探究,创造性地解决问题的能力。

**【例8】**传说古希腊毕达哥拉斯学派的数学家经常在沙滩上画点或用小石子表示数。他们研究过如图所示的三角形数:



将三角形数 $1, 3, 6, 10, \dots$ 记为数列 $\{a_n\}$ ,将可被5整除的三角形数按从小到大的顺序组成一个新数列 $\{b_k\}$ ,可以推测:

- (1) $b_{2018}$ 是数列 $\{a_n\}$ 中的第\_\_\_\_\_项;  
(2) $b_{2k-1} =$ \_\_\_\_\_。(用 $k$ 表示)

**【参考答案】**(1)5045; (2) $\frac{5k(5k-1)}{16}$ 。提示:由

已知可以写出三角形数的一个通项公式为 $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ ,写出其若干项有:1, 3, 6, 10, 15, 21, 28,

36, 45, 55, 66, 78, 91, 105, 120, ..., 其中能被5整除的为10, 15, 45, 55, 105, 120, ..., 故 $b_1 = a_4, b_2 = a_5, b_3 = a_9, b_4 = a_{10}, b_5 = a_{14}, b_6 = a_{15}, \dots$ ,从而由上述规律可猜想: $b_k = a_{5k} = \frac{5k(5k+1)}{2}$ 。

本题主要考查考生试验观察、自主探究、实践应用和阅读自学能力,考查由特殊到一般、归纳、类比等逻辑思维方法。

**【例9】**请构造一个无穷递增数列,且该数列的各项取值在正负1之间:\_\_\_\_\_。

答案: $a_n = 1 - \frac{1}{n}$  (答案不唯一)。

开放性问题是北京卷近两年的新题型,其特点在于灵活,考查主旨不在难,而是考生对知识本身的理解,这类题目很好地体现了北京考题的“大气”。

氧化还原相关知识  
在高中化学中的巧用

北京市第一中学教师 孙陆沙

氧化还原的知识是高中化学中的重要内容,在高考中经常出现涉及该知识点的试题。氧化还原的知识之所以重要,还在于如果把其相关知识应用到高中化学其他部分的学习中,往往会收到意想不到的效果。

在氧化还原反应中有一条规律:同一元素的相邻价态一般不发生反应,而如果价态相隔,在一定条件下可以发生反应。如果把此规律应用到一些典型化学方程式的记忆中,考生就会有深刻印象,而且不容易记错。如: $\text{H}_2\text{S}$ 与 $\text{S}$ 不反应, $\text{S}$ 与 $\text{SO}_2$ 不反应, $\text{SO}_2$ 与 $\text{SO}_3$ 不反应。而 $\text{H}_2\text{S}$ 却可以与浓硫酸反应: $\text{H}_2\text{S} + \text{H}_2\text{SO}_4(\text{浓}) = \text{S} \downarrow + \text{SO}_2 \uparrow + 2\text{H}_2\text{O}$ 。类似的还有 $\text{C}$ 与 $\text{CO}$ 不反应, $\text{CO}$ 和 $\text{CO}_2$ 不反应,而 $\text{C}$ 与 $\text{CO}_2$ 可以在高温下反应生成 $\text{CO}$ 。 $\text{Fe}$ 与 $\text{Fe}^{2+}$ 不反应, $\text{Fe}^{2+}$ 与 $\text{Fe}^{3+}$ 不反应,而 $\text{Fe}$ 却可以与 $\text{Fe}^{3+}$ 反应生成 $\text{Fe}^{2+}$ : $\text{Fe} + 2\text{Fe}^{3+} = 3\text{Fe}^{2+}$ 。

对电化学的知识,考生往往不太容易理解。如果考生适当地把氧化还原知识与电化学知识相结合,既有助于复习氧化还原知识,也有利于对电化学知识的记忆。

在原电池中有一些考生经常不会书写的电极反应,主要是因为分不清正负极。一些考生只能简单地记忆为:活泼性强的一极为负极,但遇到无法判断谁活泼的题目时,便无从下手。因此,对原电池知识的学习,考生要究其实质。原电池中的反应,其实就是一个自发的氧化还原反应。以铜锌原电池为例:负极 $\text{Zn}$ 失电子,发生氧化反应,电子通过导线从负极流向正极,稀硫酸中的 $\text{H}^+$ 和 $\text{SO}_4^{2-}$ 离子发生定向移动。 $\text{H}^+$ 向正极移动, $\text{SO}_4^{2-}$ 向负极移动。很多考生不理解为何 $\text{H}^+$ 向正极移动,可以引入氧化还原的知识来帮助理解。 $\text{H}^+$ 只能得电子,电子在哪一极出现, $\text{H}^+$ 就会去哪一极得电子,电子经过导线从负极到了正极,所以 $\text{H}^+$ 就向正极移动了。考生这样学习,便会记得牢固。学习原电池时,老师一般会讲失电子的一极是负极,但怎样判断哪一极失电子呢?如果从化合价的角度分析,效果会很好。例如,高考对原电池相关知识的考查,有时会通过选择题的形式,给出一个考生没见过的总的电池反应,让考生作答。考生如果能记住失电子的一极为负极,而从题目中

正确找出哪些物质的化合价升高了,就一定失电子了,负极便找到了,问题也就迎刃而解了。

**【例】**某锂电池的总反应为:

$\text{Li} + \text{MnO}_2 = \text{LiMnO}_2$ 。下列说法中正确的是( )。

A.  $\text{Li}$ 是正极, $\text{MnO}_2$ 是负极。

B. 放电时负极的反应为:  
 $\text{Li} - \text{e}^- = \text{Li}^+$

C. 放电时正极的反应为:  
 $\text{MnO}_2 - \text{e}^- = \text{MnO}_2^+$

D. 电池放电时,产生高锰酸根离子。

**【分析】**从电池的总反应可以判断出, $\text{Li}$ 反应后从零价变到+1价。化合价升高,失电子,所以 $\text{Li}$ 为负极。负极的反应为: $\text{Li} - \text{e}^- = \text{Li}^+$ 。负极失电子,正极得电子,所以,正极反应为 $\text{MnO}_2 + \text{e}^- = \text{MnO}_2^-$ 。高锰酸根应为 $\text{MnO}_4^-$ 。所以,答案为B。

电解池是电化学中另一块重要知识点。考生学习此部分知识点时,往往会和原电池的知识混淆。考生怎样才能把这部分知识要点记准、记牢呢?也可适当把氧化还原反应的一些知识引入进来。

电解池要比原电池复杂,首先要正确找出电解池的阴、阳极。跟电源的正极相连的电极是阳极,跟电源的负极相连的电极是阴极。其次要知道阴、阳极的反应是什么。判断阴、阳极时,考生经常记不准到底哪一极失电子,死记硬背的效果也比较差。因此,考生要注意方法。下面举例说明。

用惰性电极电解 $\text{CuCl}_2$ ,接好电源后,阳极带正电,所以电解池中带负电的 $\text{Cl}^-$ 和水电离产生的 $\text{OH}^-$ 向阳极移动。带正电的 $\text{Cu}^{2+}$ 和水电离产生的 $\text{H}^+$ 向阴极移动。这样正、负电荷的去向就弄清楚了。然后,明确阴、阳离子的放电顺序, $\text{Cl}^-$ 大于 $\text{OH}^-$ ,因此阳极是 $\text{Cl}^-$ 先反应。那么 $\text{Cl}^-$ 是失电子还是得电子呢?要从氧化还原的角度去分析。因为, $\text{Cl}^-$ 已经是氯的最低价态,只有还原性,没有氧化性,换句话说就是 $\text{Cl}^-$ 只能失电子,不可能得电子,这样阳极反应就可以正确地写出来了。阳极: $2\text{Cl}^- - 2\text{e}^- \rightarrow \text{Cl}_2$ ,氯从-1价失电子,化合价升高变成零价。由于零价的氯只能以双原子的氯气形式存在,所以应当为两个-1价的氯参加反应。同理,分析阴极的反应。 $\text{Cu}^{2+}$ 得电子的能力大于 $\text{H}^+$ ,所以阴极的反应为: $\text{Cu}^{2+} + 2\text{e}^- \rightarrow \text{Cu}$ 。这样学习有助于一些基础不太好的考生记得更牢固,同时对理解和思维能力的提高也很有帮助。

当然,考生遇到具体问题,还要调用所学知识,进行多维度分析,通过不断总结和归纳,就可以把这部分难点知识攻克。