



数 学

三角函数与解三角形难点突破策略

首都师范大学附属中学 夏繁军

三角函数与解三角形是高考必考点,其概念多、公式多、难点分散,解题时运算路径的选择还会直接影响计算量,考生在复习时存在诸多困难,下面结合具体实例给出本部分难点突破策略。

如何缩小角的范围

在三角函数运算和解三角形中,考生常常需要缩小角的范围来确定这个角的某一种三角函数值.如何缩小角的范围?下面结合实例分析.

【例1】已知 $\tan \alpha, \tan \beta$ 是方程 $6x^2 - 5x + 1 = 0$ 的两个根,且 $\alpha, \beta \in (0, \pi)$,求 $\alpha + \beta$.

分析:由已知和韦达定理可得: $\tan \alpha \tan \beta = \frac{1}{6}$, $\tan \alpha + \tan \beta = \frac{5}{6}$, $\therefore \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = 1$, $\therefore \tan \alpha > 0$, $\tan \beta > 0$, $\alpha, \beta \in (0, \pi)$, $\therefore \alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\alpha + \beta \in (0, \pi)$, $\therefore \alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$.

小结:考生可先求出角的一种三角函数值,然后再确定角的范围,比如本题利用 $\tan \alpha > 0$, $\tan \beta > 0$ 将 α, β 的范围缩小为 $(0, \frac{\pi}{2})$. 考生还可以根据 $0 < \tan \alpha < 1$, $0 < \tan \beta < 1$, 利用正切函数的单调性将两个角的范围进一步缩小为 $(0, \frac{\pi}{4})$.

解三角形中多个解如何检验

在解三角形中,若已知两边和一边的对角,考生则既可以用正弦定理也可以用余弦定理来解题.在用余弦定理解题时,有时会出现两个正数解,如何检验两个解呢?

【例2】在 $\triangle ABC$ 中, $a = 3, b = 2\sqrt{6}, \angle B = 2\angle A$.
(I)求 $\cos A$ 的值;(II)求 c 的值.

分析:(I) $\cos A = \frac{\sqrt{6}}{3}$. 第(II)问考生可根据第(I)问的结果求出 $\sin C = \sin(A + B) = \frac{5\sqrt{3}}{9}$. 所以 $c = \frac{a \sin C}{\sin A} = 5$.

考生根据余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ 得 $c^2 - 8c + 15 = 0$, 解得 $c = 3$ 或 $c = 5$, 这两个正数解如何检验呢?

方法1:当 $c = 3$ 时, $a = c, \angle C = \angle A$, 又因 $\angle B = 2\angle A$, $A + B + C = \pi$, 所以 $\angle B = 90^\circ, \angle C = \angle A = 45^\circ$, 则 $b = \sqrt{2}c = 3\sqrt{2}$, 与已知 $b = 2\sqrt{6}$ 矛盾.

方法2:因为 $\cos A = \frac{\sqrt{6}}{3} > \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^\circ$, 根据余弦函数的单调性, $\angle A < 45^\circ, a = c, \angle C = \angle A < 45^\circ, \angle B = 2\angle A < 90^\circ$, 与 $A + B + C = \pi$ 矛盾.

方法3:根据正弦定理, $\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}, c = 5$, 因此正弦定理是检验的根本路径.

劣构型试题如何选择合适的条件

劣构型试题是高考的新难点,在三角函数与解三角形中劣构型试题很常见,考生如何根据题目要求选择合适的条件?

【例3】从下列四个条件① $a = \sqrt{2}c$; ② $C = \frac{\pi}{6}$; ③ $\cos B = -\frac{\sqrt{2}}{4}$; ④ $b = \sqrt{7}$ 中选出三个条件,能使满足所选条件的 $\triangle ABC$ 存在且唯一,你选择的三个条件是____(填写相应的序号),所选三个条件下的 c 的值为_____.

分析:考生在做劣构型试题时首先要明确三点:1. 从几个条件中选几个? 2. 满足条件是什么? 3. 求什么? 这三点对应的本题信息为:1. 在四个条件中选三个;2. 满足

$\triangle ABC$ 存在且唯一;3. 求边 c 的值.

若选①②,根据正弦定理, $\sin A = \sqrt{2} \sin C = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\therefore \angle A = 45^\circ$ 或 $\angle A = 135^\circ$ 都可以,因此不唯一,①②不能同时选;若选①②③, $\therefore \cos B = -\frac{\sqrt{2}}{4} < 0$, $\therefore \angle A = 45^\circ$, $\angle C = 30^\circ$, $\therefore \angle B = 105^\circ$, 与 $\cos B = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ 矛盾,所以三角形不存在;若选①②④,则三角形不唯一.若选①③④, $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{2c^2 + c^2 - 7}{2\sqrt{2}c} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$, 得 $c = \frac{\sqrt{7}}{2}$;若选②③④, $\cos B = -\frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \sin B = \frac{\sqrt{14}}{4}, \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{\sqrt{7}}{\frac{1}{2}} = \frac{c}{\frac{1}{2}}$, 得 $c = \sqrt{2}$.

小结:三角形存在条件:1. 两边之和大于第三边,大边对大角;2. 三个内角和为 180° .

三角形唯一确定的条件:三边(SSS)、两边及其夹角(SAS)、两角(即已知三角)及任意一边(ASA).若已知三个角,所给三角形只能相似;若已知两边与一边的对角,三角形可有两个解、一个解、无解或不确定.

【例4】(2021年北京卷第16题)已知在 $\triangle ABC$ 中, $c = 2b \cos B, c = \frac{2\pi}{3}$.

(1)求 B 的大小;
(2)在下列三个条件中选择一个作为已知,使 $\triangle ABC$ 存在且唯一确定,并求出 BC 边上的中线的长度.

① $c = \sqrt{2}b$; ② 周长为 $4 + 2\sqrt{3}$; ③ 面积为 $S_{\triangle ABC} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

分析:(1)解得 $B = \frac{\pi}{6}$; (2)若选择①:由正弦定理结合(1)可得 $\frac{c}{b} = \frac{\sin C}{\sin B} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$, 与 $c = \sqrt{2}b$ 矛盾,故这样的

$\triangle ABC$ 不存在.

若选择②:由(1)可得 $A = \frac{\pi}{6}$, 设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R , 则由正弦定理可得 $a = b = 2R \sin \frac{\pi}{6} = R, c = 2R \sin \frac{2\pi}{3} = \sqrt{3}R$, 则周长 $a + b + c = 2R + \sqrt{3}R = 4 + 2\sqrt{3}$, 解得 $R = 2$, 则 $a = 2, c = 2\sqrt{3}$, 由余弦定理可得 BC 边上的中线的长度为: $\sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 1^2 - 2 \times 2\sqrt{3} \times 1 \times \cos \frac{\pi}{6}} = \sqrt{7}$.

若选择③:由(1)可得 $A = \frac{\pi}{6}$, 即 $a = b$, 则 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}a^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$, 解得 $a = \sqrt{3}$, 由余弦定理可得 BC 边上的中线的长度为: $\sqrt{b^2 + (\frac{a}{2})^2 - 2 \times b \times \frac{a}{2} \times \cos \frac{2\pi}{3}} = \sqrt{3 + \frac{3}{4} + \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{21}}{2}$.

如何确定三角函数性质中的取值范围

考生在研究正弦型函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi) (\omega > 0)$ 性质中,常涉及参数 ω 的性质. ω 虽与函数的周期有关,但考生还要结合其他性质综合分析得到 ω 的范围.

【例5】已知函数 $y = \sin \omega x (\omega > 0)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上为增函数,且图象关于点 $(3\pi, 0)$ 对称,则 ω 的取值集合为_____.

分析:考生首先要注意到函数 $y = \sin \omega x (\omega > 0)$ 是奇

函数,过原点,因此在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上为增函数即在区间 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上为增函数,因此 $\frac{T}{2} = \frac{T}{\omega} \geq \pi, 0 < \omega \leq 1$, 又 $3\omega\pi = k\pi, \omega = \frac{k}{3}, k \in \mathbb{Z}$, 所以 $\omega = \frac{1}{3}$ 或 $\omega = \frac{2}{3}$ 或 $\omega = 1$. 本题考查了三角函数的图象与性质(单调性、对称性和周期性).

【例6】已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi) (\omega > 0, 0 \leq \varphi \leq \pi)$ 是 R 上的偶函数,其图象关于点 $M(\frac{3\pi}{4}, 0)$ 对称,且在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上是单调函数,求 φ, ω 的值.

分析:由 $f(x)$ 是 R 上的偶函数,可得 $\cos \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$, 再由其图象关于点 $M(\frac{3\pi}{4}, 0)$ 对称,得 $f(\frac{3\pi}{4}) = 0$, $\omega = \frac{2}{3}(2k + 1)$, 再由函数在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上是单调函数,得 $\frac{\pi}{2} \leq \frac{T}{2} = \frac{2\pi}{2\omega} \Rightarrow \omega \leq 2$, 所以 $\omega = \frac{2}{3}$ 或 $\omega = 2$.

小结:参数 ω 影响正弦型函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi) (\omega > 0)$ 的周期,考生要注意 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上单调递增(减),则得 $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega} \geq b - a$, 若函数为 $f(x) = A \sin(2\omega x + \varphi) (\omega > 0)$, 则周期 $T = \frac{2\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{\omega}$.

正余弦函数图象在解决函数性质中的作用

正余弦函数图象是正余弦函数性质的直观表现,考生不仅要熟悉单个函数图象及其变换,还要综合分析两类函数图象间的关系,解决具体问题.

【例7】如图1所示,函数 $y = \sqrt{2} \sin \omega x (\omega > 0)$ 和函数 $y = \sqrt{2} \cos \omega x (\omega > 0)$ 图象的相邻两个交点为 A 和 B , 若 $\sqrt{5} < |AB| < 2\sqrt{2}$, 则 ω 的取值范围是_____.

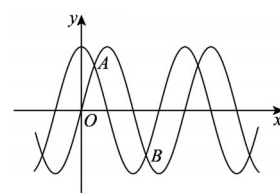


图1

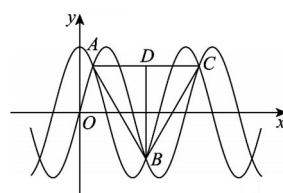


图2

分析:根据对称性由图2可知 $|AB| = |BC|$, 三角函数的周期为 $T = \frac{2\pi}{\omega}$, 且 $|AC| = T$, 取 AC 的中点 D , 连接 BD , 则 $BD \perp AC$, $|AB| = \sqrt{|AD|^2 + |BD|^2}$, 由 $\sqrt{2} \sin \omega x = \sqrt{2} \cos \omega x$, 得 $\omega x = \frac{\pi}{4}$ 或 $\omega x = \frac{5\pi}{4}$, 则 $y_A = \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4} = 1, y_B = \sqrt{2} \sin \frac{5\pi}{4} = -1$, 则 $|BD| = 2, |AB| = \sqrt{|AD|^2 + |BD|^2} = \sqrt{\frac{T^2}{4} + 4}$, 因为 $\sqrt{5} < |AB| < 2\sqrt{2}$, 所以 $\sqrt{5} < \sqrt{\frac{T^2}{4} + 4} < 2\sqrt{2}$, 解得 $2 < T < 4$, 即 $2 < \frac{2\pi}{\omega} < 4$, 所以 $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$.

小结:正余弦函数图象不仅在解决三角函数性质中有重要作用,在认识一般函数的周期性、对称性方面也有重要作用,比如函数相邻两条对称轴(或对称中心)之间的距离的2倍恰好是函数的周期.诱导公式中蕴含三角函数的对称性,比如 $\forall x \in R, \sin(-x) = -\sin x$, 即函数 $f(x) = \sin x$ 是奇函数,图象关于原点对称,再拓展可得到 $\forall x \in R, \sin(2k\pi - x) = -\sin x$, 即函数满足 $f(2k\pi - x) = f(x)$, 函数图象关于 $(k\pi, 0)$ 成中心对称.