首都教育高质量发展·高招

数学

海淀期中试卷分析与备考策略指导

北京市第三十五中学　付海龙

海淀区期中数学试卷主要考查了集合与逻辑、复数、不等式、函数与导数、三角函数、向量、数列等.本文结合学生做题情况,给予试题分析与备考指导.

试卷选择题和填空题部分多为基础知识的直接考查,如集合运算、复数运算、基本不等式、函数性质、三角函数定义等,这些题目旨在检验考生对数学基础知识的理解和掌握程度.

关于能力考查,现针对考生在考试中出现的问题逐一分析解答.

【题目8】大面积绿化可以增加地表的绿植覆盖,可以调节小环境的气温,好的绿化有助于降低气温日较差(一天气温的最高值与最低值之差).图1是甲、乙两地某一天的气温曲线图.假设除绿化外,其他可能影响甲、乙两地温度的因素均一致,则下列结论中错误的是(　　)

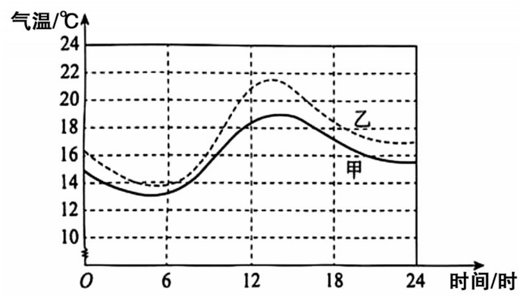

图1

A. 由图1推测,甲地的绿化好于乙地

B. 当日6时到12时,甲地气温的平均变化率小于乙地气温的平均变化率

C. 当日12时到18时,甲地气温的平均变化率小于乙地气温的平均变化率

D. 当日必存在一个时刻,甲、乙两地气温的瞬时变化率相同

答案:C

分析:本题属于数学应用能力的考查,以气温变化为背景,通过分析甲、乙两地气温曲线,考查考生对函数平均变化率、瞬时变化率等概念的理解与应用,要求考生能将实际问题转化为数学问题进行求解.

考生不选C的原因是对平均变化率的概念存在误解.平均变化率是指在某一时间段内,气温变化量与时间变化量的比值.在12时到18时这个时间段内,甲地气温变化量为Δy_1,乙地气温变化量为Δy_2.注意Δy_1和Δy_2均<0,且$|\Delta y_1|<|\Delta y_2|$,从而$\Delta y_1>\Delta y_2$.甲地的平均变化率为$\frac{\Delta y_1}{6}$,甲地的平均变化率为$\frac{\Delta y_2}{6}$,从而甲地气温的平均变化率大于乙地气温的平均变化率.考生误认为$\Delta y_1<\Delta y_2$,从而排除了C选项,选择了D选项.

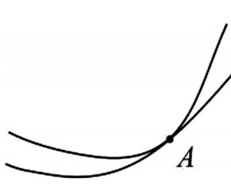

图2

由此可见,考生对使用数形结合思想解决问题的掌握不够灵活.其实,考生可以尝试把图1中的乙图象向下平移,那么一定会在某个局部出现图2的情形,此时A点处甲、乙两地气温的瞬时变化率是否相同呢?即使不会严谨证明,通过模糊的感知,也可以认为变化率是相同的(两曲线在点A处有相同的切线).

【题目9】设无穷等差数列$\{a_n\}$的前n项积为T_n.若$a_1<0$,则“T_n有最大值”是“公差$d\ge0$”的

A.充分而不必要条件　B.必要而不充分条件

C.充分必要条件　D.既不充分也不必要条件

答案:A

分析:本题考查考生的逻辑推理能力,需要考生运用逻辑推理,结合数列性质进行分析.大多数考生能分析出不必要性是正确的,但充分性拿不准.本题可以采用反证法来解决,就是:若$a_1<0$,则“T_n有最大值”推不出“公差$d\ge0$”的话,则应该有$d<0$.若$d<0$,不难想象,$0>a_1>a_2>a_3>\cdots$,很显然T_n是没有最大值的.这就产生矛盾了,所以应有公差$d\ge0$成立.

在复习过程中,考生应注意等差数列及等比数列的函数特性,结合函数特性来研究数列问题.

【题目10】已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=ra_n(1-a_n)$ $(n=1,2,3,\cdots)$,$a_1\in(0,1)$,则

A. 当$r=2$时,存在n使得$a_n\ge1$

B. 当$r=3$时,存在n使得$a_n<0$

C. 当$r=3$时,存在正整数N,当$n>N$时,$a_{n+1}>a_n$

D. 当$r=2$时,存在正整数N,当$n>N$时,$a_{n+1}-a_n<\frac{1}{2024}$

答案:D

分析:本题主要考查考生的综合分析能力,需要考生综合考虑数列递推关系、数列项的取值范围、单调性等多个因素,对考生综合分析能力要求较高.

这类题目一般和不动点相结合,其解决方式是把数列问题函数化,结合函数图象快速观察数列的变化趋势.

下面仅就$r=2$的时候进行分析.

步骤一:在同一坐标系画出函数$y=2x(1-x)$和$y=x$的图象(其中$0<x<1$),如图3.

步骤二:针对a_1的不同取值,逐一分析a_n的变化规律.

若$0<a_1<1$,如图4,画出a_2,a_3,a_4,$\cdots$,观察出$\{a_n\}$递增,且无限趋近于0.5;若$a_1=0.5$,则$\{a_n\}$为常数列;若$0.5<a_1<1$,考生可以模仿上面的思路画下来.

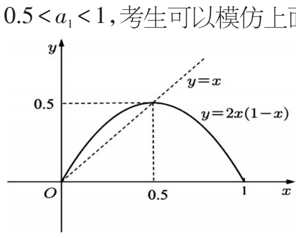

图3

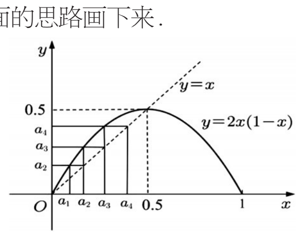

图4

至此,选D的理由已经显而易见.其实$\frac{1}{2024}$可以换成任意正数,因为$\{a_n\}$是递增数列,且无限趋近于0.5,所以$a_{n+1}-a_n>0$且无限趋于0.

【题目14】已知函数$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$满足$f(x)\ge-2f(0)$恒成立.

①φ的取值范围是________;

②若$f(\frac{2\pi}{3})=-2f(0)$,则ω的最小值为________.

答案:$\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$,2

分析:本题需要考生综合运用三角函数的性质、不等式恒成立的条件以及三角函数的求值方法解决问题.要求考生有较强的逻辑推理能力和数学运算能力,能够灵活运用所学知识进行推导和计算.

本题涉及两个基本问题:恒成立与存在.

恒成立:$f(x)\ge-2f(0)$恒成立,指的是$f(x)$的最小值$\ge-2f(0)$,即$-1\ge-2f(0)$;

存在:若$f(\frac{2\pi}{3})=-2f(0)$,指的是$-2f(0)$来自于$f(x)$的值域中的某个值,即$-1\le-2f(0)\le1$.

两者结合,可得$-2f(0)=-1$,即$f(0)=\frac{1}{2}$.

考生在这里出现的问题是上述两个基本问题的等价转化不到位,导致无从下手.

【题目15】已知函数$f(x)=\frac{\ln(x+1)}{\ln x}$,其定义域记为集合$D$,$a,b\in D$,给出下列四个结论:

① $D=\{x|x>0且x\ne1\}$;

② 若$ab=1$,则$|f(a)-f(b)|>1$;

③ 存在$a\ne b$,使得$f(a)=f(b)$;

④ 对任意a,存在b使得$f(a)+f(b)=1$.

其中所有正确结论的序号是________.

答案:①②④

分析:本题主要考查考生的综合分析能力,需要结合函数的定义域、值域,单调性,以及函数图象草图来研究问题.需要考生对函数的相关知识有较为深入的理解和掌握.

本题重点是在②③④的判断上,解决问题的根本是画出函数$f(x)=\frac{\ln(x+1)}{\ln x}$的图象.

方案一:分别画出$y=\ln(x+1)$和$y=\ln x$的图象(如图5),通过分析,画出$f(x)$的图象草图(如图6);

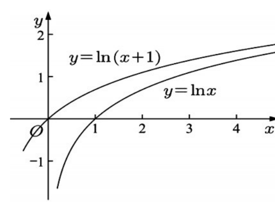

图5

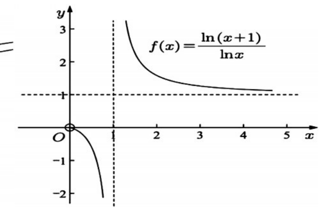

图6

方案二:分别画出$y=\ln(x+1)$和$y=\ln x$的图象(如图5),结合导数$f'(x)=\frac{x\ln x-(x+1)\ln(x+1)}{x(x+1)\ln^2 x}$,画出$f(x)$的图象(如图6).

两种方式都要注意函数$f(x)$的图象不是连续的,要针对$x\in(0,1)$和$(1,+\infty)$分别分析.其中,当$x>1$时,$\ln(x+1)>\ln x>0$,所以$\frac{\ln(x+1)}{\ln x}>1$.

【题目17】设函数$f(x)=A\sin 2x-2\sin^2 x+1$($A>0$),从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知.

(Ⅰ)求A的值;

(Ⅱ)若$f(x)$在$(0,m)$上有且仅有两个极大值点,求m的取值范围.

条件①:$f(\frac{\pi}{4})+f(\frac{7\pi}{12})=0$;

条件②:将$f(x)$的图象向右平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度后所得的图象关于原点对称;

条件③:对于任意的实数x_1,x_2,$|f(x_1)-f(x_2)|$的最大值为4.

分析:本题第二问难度系数较高,考生要有清晰的解题逻辑,从已知条件出发,逐步推导出结果.同时,考生需要在解题过程中选择合适的策略.三个条件均可以选择,但考生要筛选哪一个更容易解决问题.考后复盘时可以逐一分析每个条件的本质是什么,但在考试时就要选择哪个容易且高效.

此题得分低还有一个原因是考生对“有且仅有两个极大值点”理解不到位,转化不准确.结合正弦函数的特点,此处的极大值点就是使函数取得最大值时的x值.考生可以先找到一般的极值点表达式,再结合区间分析取值范围.

【题目20】已知函数$f(x)=a\ln(x-a)+\frac{1}{2}x^2-(2a+1)x$,$a>0$.

(Ⅰ)若$f(x)$在$x=4$处取得极大值,求$f(4)$的值;

(Ⅱ)求$f(x)$的零点个数.

分析:本题第二问得分率很低,涉及零点定义和零点存在性定理以及分类讨论思想的考查.解题的关键点:$f(x)$的定义域为$(a,+\infty)$,$f'(x)=\frac{(x-2a)[x-(a+1)]}{x-a}$.

对于综合性题目,考生应具备抢分策略.比如本题,考生至少要针对$f'(x)=0$的两根进行分类讨论,将函数的单调性写清楚.这样就能快速抢到一些分数.接下来考生可以根据函数的单调性、极值等性质,在脑海中或在草稿纸上简单勾勒出函数图象的大致形状,从而直观地判断函数图象与轴的交点个数,即零点个数.

通过对本次数学题目的分析,考生可以了解到不同题目对各种能力的考查重点.在复习过程中,考生应扎实掌握基础知识,提升逻辑推理、综合分析等能力,同时学会运用数形结合、函数化等思想方法解决问题.