



数 学

“对比式学习”助力考生理解易错知识点

北京市第一〇一中学 邱 静

在初中学考复习阶段,科学高效的备考方案至关重要。其中,“对比式学习”着重于学习同类实例之间的共同特征,区分非同类实例之间的不同之处,能帮助考生深刻地理解易错、易混知识点。

一、一元二次方程根的定义

【例1】关于 x 的方程 $x^2-2(k+1)x+k^2=0$

【对比1】如果 $x=2$ 是方程的一个根,求 k .

【对比2】判断 $x=-1$ 是否可能是上面方程的一个实数根,说明理由.

【易错点】考生对“方程根的定义”掌握较好,但对于“未知数不是方程的解”这个概念理解不深刻。判断一个未知数是否是方程的解,应分别代入方程左边、右边,进行代数式求值,再比较两个代数式的值是否相等。

解:① $\because x=2$ 是方程的根, $\therefore 2^2-2(k+1)\cdot 2+k^2=0$,解得 $k=0$ 或者 $k=4$.

②当 $x=-1$ 时,方程左边 $=(-1)^2-2(k+1)\cdot(-1)+k^2=k^2+2k+1+2=(k+1)^2+2\geq 2$;而方程右边 $=0$.

$\therefore$ 方程左边 $\neq$ 方程右边.

$\therefore x=-1$ 不是方程的根.

二、一元二次方程的根满足一些要求

【例2】已知关于 x 的一元二次方程 $mx^2-3(m+1)x+2m+3=0$,如果该方程有两个不相等的实数根

【对比1】当该方程的两个根都是**整数**,求**非负整数** m 的值.

【对比2】该方程的两个根都是**非负整数**,求**整数** m 的值.

【易错点】考生常常混淆“根为整数(或者正整数、负整数)”“字母系数为整数(或者正整数、负整数)”等条件。改进方法如下:第一,考生需要加强代数式变形,特别是分式的恒等变形;第二,考生应逐句写出符号语言。

解: $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $mx^2-3(m+1)x+2m+3=0$ 有两个不相等的实数根, $\therefore m\neq 0$,且 $\Delta=3^2\cdot(m+1)^2-4m\cdot(2m+3)=m^2-6m+9=(m-3)^2>0$.

$\therefore m-3\neq 0$;综上所述, $m\neq 0$ 且 $m\neq 3$.

$\therefore x_1=\frac{3(m+1)+m-3}{2m}=2, x_2=\frac{3(m+1)-(m-3)}{2m}=\frac{m+3}{m}=1+\frac{3}{m}$

① $\because$ 该方程的两个根都是**整数**, $\therefore m$ 是3的约数:1,-1,3,-3; $\therefore m=1,-1,-3$;

又 $\because m$ 是非负整数, $\therefore m=1$.

② $\because$ 该方程的两个根都是**非负整数**, $\therefore m=1,-1,-3$ 有可能成立:

当 $m=1$ 时, $x_2=1+\frac{3}{m}=1+3=4>0$ 成立;

当 $m=-1$ 时, $x_2=1+\frac{3}{m}=1-3=-2<0$ 不成立;

当 $m=-3$ 时, $x_2=1+\frac{3}{m}=1-1=0$ 成立.

$\therefore m=1,-3$.

三、一元二次方程的实际问题

【例3】【对比1】某地2013年投入教育经费2500万元,2015年投入教育经费3025万元,求年平均增长率。

【对比2】某病毒传播速度快,如果最初有两个人感染这种病毒,经两轮传染后,就有50个人被感染,每轮传染中平均一个人会传染给几个人?

【易错点】增长率、传染病是一元二次方程中常见的两种类型题,部分考生对“两次”“两年”“两轮”等不会表示。考生在解答时可以尝试列表一步一步写出第一次、第一年、第一轮代数式,进而准确表示出两次、两年、两轮的代数式,最终列出方程。

解:①设年平均增长率为 x ,根据题意得 $2500\cdot(1+x)^2=3025$,解得 $x=0.1=10\%$ 或 $x=-2.1$ (不合题意舍去)。

②设每轮传播中平均一个人会传染给 x 个人,则第

一轮会传染给 $2x$ 人,第二轮会传染给 $x\cdot(2+2x)$ 人,依题意得: $2+2x+x\cdot(2+2x)=50$,整理得: $x^2+2x-24=0$.

解得: $x_1=4, x_2=-6$ (不合题意,舍去),答:每轮平均一个人传染4个人。

四、圆的垂径定理

【对比1】垂直弦

垂直于弦的直径平分弦,并且平分弦所对的弧。(垂径定理可以直接使用)

【对比2】平分弦

平分弦(不是直径)的直径垂直于弦。(垂径定理的逆定理可以直接使用)

【对比3】垂直平分半径

如果直角三角形中,一条直角边与斜边之比为1:2,那么这条直角边所对的角为 30° 。(需要证明)

【例4】【对比1】如图1,弦 CD 垂直于 $\odot O$ 的直径 AB , $CD=4, BD=\sqrt{5}, AB$ 的长为_____。

【对比2】如图2,直径 $AB=8$,平分弦 $CD, OH:OB=3:4$,则弦 CD 的长是_____。

【对比3】如图3, $OC=6, AB$ 垂直平分 $OC, \angle AOB=$ _____。

【易错点】部分考生容易将“垂直平分半径”,想当然理解成“垂直平分弦”。

解:①本题是常规的“垂直弦的直径平分弦”的图形;先解直角三角形 BHD ,得到 $BH=\sqrt{(\sqrt{5})^2-2^2}=1$;再解三角形 OHD ,设 $OB=OD=x$,

$\therefore OH^2+HD^2=OD^2$,

$\therefore (x-1)^2+2^2=x^2$,

$\therefore x=2.5, AB=5$.

②本题是常规的“平分弦(不是直径)的垂直弦”的图形:根据已知条件能计算出 $OH=3$,再利用勾股定理得出 $HD=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$, $\therefore CD=2\sqrt{7}$.

③本题属于特别容易看错的题目。 $\because AB$ 垂直平分 OC , $\therefore$ 得到一个直角三角形,直角边与斜边的比值为1:2, $\therefore \angle AOC=60^\circ, \therefore \angle AOB=120^\circ$.

五、切线的判定及其性质

【例5】【对比1】已知:如图4, $\triangle ABC$ 为等腰三角形, O 是底边 BC 的中点, $\odot O$ 与腰 AB 相切于点 D .求证: AC 与 $\odot O$ 相切.

【对比2】如图5,在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$.以 AC 为直径作半圆 O 交 AB 于点 F, E 为 BC 的中点.求证:直线 EF 是半圆 O 的切线.

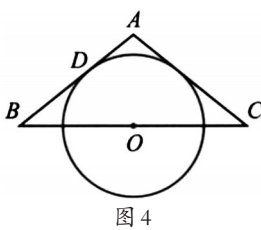


图4

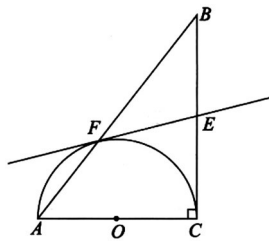


图5

【易错点】部分同学对切线的定义、性质、判定理解不清。

解:①过 O 作 $OE\perp AC$ 于 E ,

$\because \triangle ABC$ 为等腰三角形, O 是底边 BC 的中点, $\therefore AO$ 平分 $\angle BAC$;

$\therefore \odot O$ 与腰 AB 相切于点 $D, \therefore OD\perp AB$,

根据“角分线上的点到角两边的距离相等”可得 $OE=OD$,

再根据“经过半径的外端且垂直于这条半径的直线是圆的切线”可得 AC 与 $\odot O$ 相切.

②证明:连接 OF, CF .

$\because AC$ 是直径,

$\therefore \angle AFC=90^\circ$,

$\therefore \angle BFC=90^\circ$,

又 $\because E$ 是 BC 的中点,

$\therefore EF=EC$,

$\therefore \angle EFC=\angle ECF$,

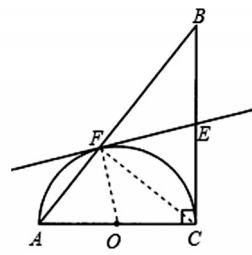
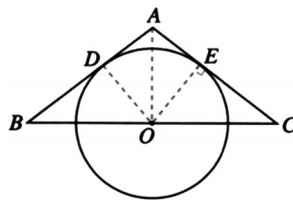
$\because OC=OF$,

$\therefore \angle OFC=\angle FCO$,

$\therefore \angle ACB=\angle FCO+\angle ECF=90^\circ$,

$\therefore \angle ECF+\angle OFC=90^\circ$,即 $\angle EFO=90^\circ$,

$\therefore OF\perp EF, \therefore EF$ 是 $\odot O$ 的切线.



六、抛物线形拱桥和圆弧形拱桥的对比学习

【例6】【对比1】如图6,一座**圆弧形**拱桥,水面宽8米时,水面距离拱顶2米;一艘货船高1米,宽5.8米能否通过?

【对比2】如图7,一座**抛物线形**拱桥,水面宽8米时,水面距离拱顶2米;一艘货船高1米,宽5.8米能否通过?



图6

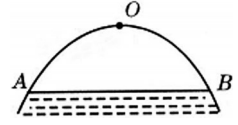


图7

【易错点】圆弧形拱桥要想到圆心和半径,可利用垂径定理求解;抛物线形拱桥要想到建立平面直角坐标系,求抛物线解析式,利用点坐标代入求解。这两种方法不能混淆。

解:①如图8,设点 E 是桥拱所在圆的圆心,过点 E 作 $EF\perp AB$ 于点 F ,延长 EF 交 AB 于点 C ,连接 AE ,则 $CF=2$ (m).

由垂径定理可知, F 是 AB 的中点, $\therefore AF=FB=\frac{1}{2}AB=4$ (m).

设半径是 r (m), $r^2=4^2+(r-2)^2$,解得 $r=5$.

当高1米的轮船刚好可通过拱桥时,如图8, MN 为轮船顶部的位置.连接 EM ,设 EC 与 MN 的交点为 D ,则 $DE\perp MN, \therefore DE=1+3=4$ (m), $\therefore DM=\sqrt{EM^2-DE^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$ (m). $\therefore MN=6$ (m) >5.8 (m), $\therefore$ 这艘轮船能通过.

②如图9建立平面直角坐标系,由题意可得 A 点坐标为 $(-4,-2)$,设抛物线的解析式为 $y=ax^2$,则 $-2=16a$,解得 $a=-\frac{1}{8}$,

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y=-\frac{1}{8}x^2$,

$\therefore$ 货箱高1米, $\therefore$ 货箱顶部离拱顶的距离为 $2-1=1$,

当 $y=-1$ 时, $-\frac{1}{8}x^2=-1$,解得 $x=\pm 2\sqrt{2}$,

$\therefore$ 箱子宽为 $4\sqrt{2}\approx 4\times 1.414=5.656$ 米 <5.8 米,

$\therefore$ 货箱不能顺利通过该桥.

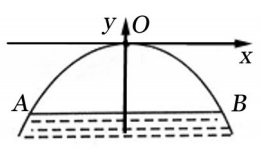


图8

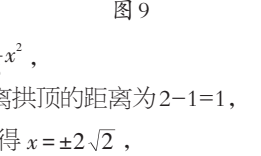


图9