首都教育 高质量发展 · 中招

数 学

代数综合题常见问题与解题突破

北京市陈经纶中学　胡宝田

初中学考数学科目的代数综合试题就像一座“迷宫”，考生很容易就会在其中迷路。初中学考往往对考生能力要求较高，不仅会考查考生对基础知识的掌握程度，还涉及解题技巧、逻辑思维以及综合应用能力等。

一、代数综合试题失误点分析

考生失误原因	具体内容分析
概念理解不透彻	在解决方程组问题时，如果考生对消元法或代入法的基本原理理解不够清晰，可能会错误地进行运算，导致解不出正确的解或者得出不存在的解。
运算错误	在复杂的代数运算中，如因式分解、配方法解二次方程等，考生容易在乘除、加减等基本运算上出错，比如符号错误、漏项等。
忽视特殊情形	解含有绝对值的方程时，考生未能考虑绝对值内部表达式的正负情况，导致漏解或多解。
缺乏解题策略	面对函数与方程结合的问题，考生可能直接尝试代入数值解题，而没有先分析函数图象特征或利用函数性质简化问题。

二、解题痛点分析

解题痛点	具体内容分析
综合应用能力不足	在处理涉及多个章节知识融合的题目时（如将一元二次方程与函数、不等式结合），考生可能难以找到合适的切入点，无法有效整合所学知识解决问题。
缺乏解题思路的灵活性	对于需要变换变量、构造新函数或方程的题目，考生可能固守一种解法，不懂得从不同角度思考问题，导致解题陷入僵局。
时间管理不当	代数综合题通常耗时较长，考生若不能合理分配时间，可能会在某一道难题上花费过多时间，影响其他题目的解答，甚至来不及检查已做题目。
阅读理解能力限制	题目表述复杂或含蓄时，考生可能误解题意，特别是面对应用题，未能准确提炼数学模型。

三、解决问题的方法与策略

初中学考试卷上代数综合试题通常涉及方程（包括一元一次方程、一元二次方程）、不等式、函数、因式分解、根的判别式、图形解析等多个知识点的综合运用，考查考生的逻辑思维能力、数学建模能力和问题解决能力。这类题目往往难度较大，要求考生能够灵活运用所学知识，进行多步骤的推理和计算。

（一）函数图象与不等式的综合

解题路径与方法：利用给定条件，理解条件的实际含义。根据图象过的具体点得到相应结果。

（二）函数变换与图象识别

已知函数某的图象关于 y 轴对称，且经过点（1，3），如果将该函数图象向左平移2个单位，再向上平移1个单位，得到的新函数图象对应的表达式是什么？

解题路径与方法：

1.原函数性质分析：由于原函数图象关于 y 轴对称，可以推断出原函数可能为的形式。

2.利用给定点：代入点的坐标，写出具体函数表达式。

3.图象变换：根据平移变换或轴对称变换规则，调整函数表达式，确定最终表达式，再结合前面步骤的具体计算结果，得出新函数的准确表达式。

（三）函数再认识

函数是数与代数板块的主干知识，是研究运动变化的数学模型，它来源于实际又服务于实际，从实际中抽象出函数的有关概念，又运用函数知识解决实际问题。函数的图象与性质是函数的主体，从函数的数量特征和几何特征刻画每一类具体函数的性质，充分体现了数形结合是研究每一类函数的基本方法。

近年来，北京初中学考数学试题26题以二次函数的相关知识为载体，考查学生综合运用二次函数图象的对称性、函数的增减性等知识以及数形结合的思想方法解决问题的能力。

解题路径与方法：

1.深挖式子，找到关于对称轴、开口方向、顶点坐标、与 x 和 y 轴的交点、过定点等信息；

2.选择合适方法，如代数法（因式分解、不等式基础要过关）、数形结合分类讨论（过程要写好）；

3.动手画图，注意数形结合；

4.分类讨论时要有序讨论。

四、具体试题解析

（2024年北京初中学考真题）：

在平面直角坐标系 xOy 中，已知抛物线 $y=ax^2-2a^2x(a\neq 0)$.

（1）当 $a=1$ 时，求抛物线的顶点坐标；

（2）已知 $M(x_1,y_1)$ 和 $N(x_2,y_2)$ 是抛物线上的两点. 若对于 $x_1=3a$，$3\leqslant x_2\leqslant 4$，都有 $y_1<y_2$，求 a 的取值范围.

【解题分析】

（1）把 $a=1$ 代入 $y=ax^2-2a^2x$，转化成顶点式即可求解；

（2）分 $a>0$ 和 $a<0$ 两种情况，画出图形结合二次函数的性质即可求解；

本题考查了求二次函数的顶点式、二次函数的性质，以及考生运用分类讨论和数形结合思想解题的能力。

【详解】

（1）解：把 $a=1$ 代入 $y=ax^2-2a^2x$ 得，$y=x^2-2x=(x-1)^2-1$

∴抛物线的顶点坐标为（1，−1）；

（2）解：分两种情况：抛物线的对称轴是直线 $x=-\dfrac{-2a^2}{2a}=a$；

①当 $a>0$ 时，如图1，此时 $3a<3$，∴ $a<1$，又∵ $a>0$，∴ $0<a<1$；

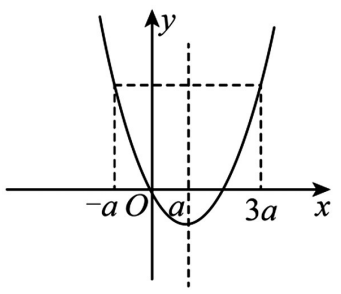

图1

②当 $a<0$ 时，如图，此时 $-a>4$，解得 $a<-4$，又∵ $a<0$，∴ $a<-4$；

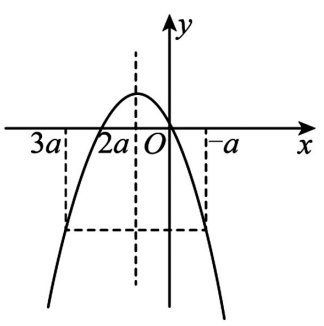

图2

综上，当 $0<a<1$ 或 $a<-4$，都有 $y_1<y_2$.

五、反思与总结

近几年，北京初中学考的代数综合题中，几个小问题的设置都是由易到难，通常都是考查一次函数和二次函数解析式的系数特征、图像与坐标轴交点的对应关系、二次函数的对称轴与顶点等核心考点。此外，还会考查抛物线图像轴对称的性质、二次函数二次项系数a的绝对值大小决定抛物线的开口大小等。除了对基础知识和基本技能的考查外，此类问题往往通过二次函数这个载体，在更高层次上考查考生对于数形结合和分类讨论等数学思想的理解和掌握情况。因此，考生在备考期间，尤其要重视对数学思想的运用。