首都教育高质量发展·高招

数学

# 平面解析几何的解题策略

北京市昌平区第二中学 刘晶

历年来，北京高考数学解答题的第19题或第20题都会考查一道平面解析几何题，许多考生在做这道解答题时，感觉束手无策．多数考生能想到的就是只要有方程，如直线方程和圆锥曲线方程，就要联立，代入消元，转化为关于一个变量的一元二次方程，再计算判别式、根与系数的关系等，一直做到做不下去为止，14分的题目往往只能得到7分至9分．

考生要明确解平面解析几何题的一般步骤．解答一般分为五个步骤：画图、设元、转化、运算、结论．考生在备考的过程中要在设元、转化、运算三个环节上下功夫．“设元”要思考设点还是设线，设哪个点，设哪条线更优；“转化”要充分挖掘几何对象的几何特征，再将挖掘后的几何特征进行合理的代数化，此环节考生要重视积累较优的将几何特征代数化的方法；“运算”指几何特征进行合理的代数化后的计算，注意不是死算而是巧算，因此本环节考生要重视积累计算技巧．下面以一道题目为例阐述以上观点．

**【例】**已知离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的椭圆 $C$：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）与直线 $x=2$ 相交于 $P$、$Q$ 两点（点 $P$ 在 $x$ 轴上方），且 $|PQ|=2$． 点 $A$，$B$ 是椭圆上位于直线 $PQ$ 两侧的两个动点，且 $\angle APQ=\angle BPQ$．

（Ⅰ）求椭圆 $C$ 的标准方程；

（Ⅱ）求四边形 $APBQ$ 面积的取值范围．

**分析**：（Ⅰ）根据题意列出关于 $a$，$b$，$c$ 的三个方程即可求得椭圆 $C$ 的标准方程；

（Ⅱ）画图分析后可知：

1.四边形 $APBQ$ 面积 $S=S_{\triangle APQ}+S_{\triangle BPQ}=\frac{1}{2}|PQ||x_B-x_A|=|x_B-x_A|$；

2.由 $\angle APQ=\angle BPQ$，可推得 $k_{AP}=-k_{BP}$．

因此本问的思路是：设出直线 $PA$：$y-1=k(x-2)$ 后，使其与椭圆方程联立，借用韦达定理用含 $k$ 的式子表示出 $x_A$，同理用含 $k$ 的式子表示出 $x_B$，从而用仅含有 $k$ 的式子表示出四边形 $APBQ$ 面积，进而应用均值定理求得四边形 $APBQ$ 面积的取值范围．

**解**：（Ⅰ）由已知得点 $P(2,1)$ 在椭圆上，且有：$\begin{cases} e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2} \\ a^2=b^2+c^2 \\ \frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} a^2=8 \\ b^2=2 \end{cases}$，

故椭圆 $C$ 的标准方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$．

（Ⅱ）由题意可知，直线 $PA$ 和直线 $PB$ 的斜率都存在且不等于0．

因为 $\angle APQ=\angle BPQ$，所以 $k_{AP}=-k_{BP}$．

设直线 $PA$ 的斜率为 $k$，则直线 $PA$：$y-1=k(x-2)$．

联立 $\begin{cases} y-1=k(x-2) \\ x^2+4y^2-8=0 \end{cases}$，得 $(1+4k^2)x^2+8k(1-2k)x+16k^2-16k-4=0$

则 $\begin{cases} \Delta>0\Rightarrow 16(2k+1)^2>0 \\ 2x_A=\frac{16k^2-16k-4}{1+4k^2} \end{cases}$，$\begin{cases} k\neq-\frac{1}{2} \\ x_A=\frac{8k^2-8k-2}{1+4k^2} \end{cases}$

因为直线 $PB$：$y-1=-k(x-2)$，所以同理可得 $\begin{cases} (-k)\neq-\frac{1}{2} \\ x_B=\frac{8(-k)^2-8(-k)-2}{1+4(-k)^2} \end{cases}$，

即 $\begin{cases} k\neq\frac{1}{2} \\ x_B=\frac{8k^2+8k-2}{1+4k^2} \end{cases}$

由于点 $A$，$B$ 是椭圆上位于直线 $PQ$ 两侧的两个动点，$\angle APQ=\angle BPQ$，且能存在四边形 $APBQ$，则直线 $PA$ 的斜率 $k$ 需满足 $|k|>\frac{1}{2}$，设四边形 $APBQ$ 面积为 $S$，则

$S=S_{\triangle APQ}+S_{\triangle BPQ}=\frac{1}{2}|PQ||x_B-x_A|=|x_B-x_A|=\left|\frac{8k^2+8k-2}{1+4k^2}-\frac{8k^2-8k-2}{1+4k^2}\right|=\left|\frac{16k}{1+4k^2}\right|=\frac{16|k|}{1+4|k|^2}=\frac{16}{\frac{1}{|k|}+4|k|}$

当 $|k|>\frac{1}{2}$ 时，$\frac{1}{|k|}+4|k|>4$，可得 $0<\frac{16}{\frac{1}{|k|}+4|k|}<4$，即 $S\in(0,4)$．

本问画图后分析出 $k_{AP}=-k_{BP}$，四边形 $APBQ$ 的面积 $S=|x_B-x_A|$。因此在设元环节想到设直线 $PA$，因为点 $P(2,1)$ 已知，所以直线 $PA$ 与椭圆方程联立后，借助韦达定理可用含 $k$ 的式子表示出 $x_A$，而直线 $PA$ 与直线 $PB$ 都过点 $P(2,1)$ 且 $k_{AP}=-k_{BP}$，即直线 $PA$ 与直线 $PB$ 的方程仅斜率处不同，因此用含 $k$ 的式子表示出 $x_A$ 后，将式子 $x_A=\frac{8k^2-8k-2}{1+4k^2}$ 中的 $k$ 替换为 $-k$ 即可求得 $x_B$，从而达到简化运算的目的．再将 $x_A=\frac{8k^2-8k-2}{1+4k^2}$ 和 $x_B=\frac{8k^2+8k-2}{1+4k^2}$ 代入 $S=|x_B-x_A|$ 中，用仅含有 $k$ 的式子表示出四边形 $APBQ$ 的面积，最后借助均值定理求得四边形 $APBQ$ 面积的取值范围，所以本环节想到如此设元．在转化环节，一是画图后发现四边形 $APBQ$ 这一几何对象可分割为均以 $PQ$ 为底的两个三角形 $\triangle APQ$ 和 $\triangle BPQ$，将这一几何特征代数化为 $S=S_{\triangle APQ}+S_{\triangle BPQ}=\frac{1}{2}|PQ||x_B-x_A|=|x_B-x_A|$；二是充分分析 $\angle APQ=\angle BPQ$ 这一几何对象，发现直线 $PA$ 与直线 $PB$ 的倾斜角互补这一几何特征，从而将这一几何特征代数化为 $k_{AP}=-k_{BP}$，本环节考生可以积累两种几何特征代数化的方法：

① $S=S_{\triangle APQ}+S_{\triangle BPQ}=\frac{1}{2}|PQ||x_B-x_A|=|x_B-x_A|$

②由 $\angle APQ=\angle BPQ$，可推得 $k_{AP}=-k_{BP}$

因此，考生在题目中若遇到表示四边形面积时，要想到分割为两个恰当的三角形后再表示四边形的面积，遇到两角相等时要想到画图后观察能否挖掘出两条直线倾斜角的关系，再借助斜率公式进行代数化．在运算环节，用含 $k$ 的式子表示出 $x_A$ 时，选用韦达定理的两根之积求得 $x_A$，减少运算量，用含 $k$ 的式子表示 $x_B$ 时，因直线 $PA$ 与直线 $PB$ 都过点 $P(2,1)$ 且 $k_{AP}=-k_{BP}$，直线 $PA$ 与直线 $PB$ 的方程仅斜率处不同，故只需将 $x_A$ 中的字母 $k$ 换为 $-k$，即可同理得 $x_B$，从而减少运算量，本环节考生要积累的计算技巧为：

①当直线与圆锥曲线联立得到关于 $x$ 的一元二次方程后，两交点中一点横坐标已知时，在借助韦达定理表示另一个根时，要思考选用两根之积、两根之和哪一个更优；

②当遇到本题中求 $x_B$ 的情景，即运算步骤类似时，要思考是否可以同理得．

通过以上例题希望考生能做到举一反三，在解题时不断积累几何特征代数化的方法，积累计算技巧，逐步完善以下知识结构图，突破解析几何题的难点．