



数 学

以知识为基础 数形结合突破难点

北京师范大学三帆中学朝阳学校 刘丽杰

二次函数是初中阶段研究的三种基本代数函数之一。它是在学生学习了一次函数的基础上,认识的更为复杂的函数,也是对函数研究思路的进一步巩固。学好二次函数,有助于学生后续学习其他类型的函数。

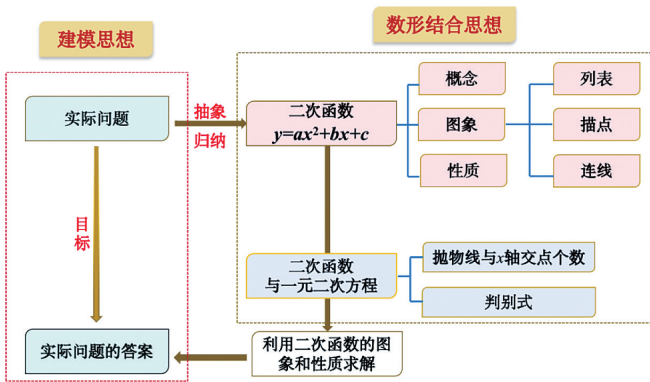
本文首先对二次函数这一章的知识结构进行梳理,再以“利用二次函数的对称性解决问题”为例,展示如何以知识为基础,结合图象,用数形结合这一数学思想突破难点,并为考生提供一些复习建议。

知识梳理

本章从实际问题出发,抽象归纳出二次函数的概念,再探究二次函数的图象和性质,并利用二次函数的图象和性质求解,从而解决实际问题,实现本章学习目标。

本章分为三部分:二次函数的概念、图象和性质,二次函数与一元二次方程及实际问题与二次函数。

二次函数的图象和性质是从最简单的二次函数 $y=x^2$ 出发,再到顶点式 $y=a(x-h)^2+k$,再到一般式 $y=ax^2+bx+c$ 逐步深入探究的,经历了从简单到复杂,从特殊到一般的研究过程,充分体现了类比、数形结合和化归的思想。从函数角度理解一元二次方程,一元二次方程的根的情况可以借助相应的二次函数图象与 x 轴的位置关系得出,从而构建互相联系的知识体系。运用二次函数的图象和性质解决实际问题则体现了建模思想。



复习建议

二次函数知识点多、综合性强,需要学生熟练掌握基础知识,如确定二次函数的表达式(一般式、顶点式),能利用特殊点画二次函数草图,理解二次函数的系数与图象形状和对称轴的关系等。在学习过程中,学生要及时反思和总结,优化解题方案,分析问题解决过程中的得失,积累研究函数问题的方法,从而不断丰富原有的知识结构体系。

二次函数的图象与性质是本章重点,其研究过程蕴含了类比、数形结合和归纳等数学思想和方法。学生可类比一次函数的研究过程架构研究二次函数的研究思路。比如,研究二次函数 $y=ax^2$ 时, $a<0$ 的情况可以类比 $a>0$ 的情况进行讨论,通过类比已学的知识来学习新知识,突出知识间的纵向联系。

数形结合地研究函数贯穿二次函数的始终,它是解决函数问题的基本思路和方法。二次函数的性质是在画出二次函数图象的基础上进行讨论的,关于二次函数的最小(大)值的结论也是通过确定函数图象的最低点或最高点获得的。

“以形助数,以数辅形”可以使复杂问题简单化,抽象问题具体化。因此,勤动手、多画图、图准确是非常有必要的。从特殊到一般、从具体到抽象的研究过程在二次函数性质的探究中也很常用,如函数 $y=ax^2$ ($a>0$) 的图象特征是归纳概括不同的简单具体的二次函数图形的共同点与不同点得来的。总之,理解二次函数的性质和特点是解决相关问题的关键。

二次函数模型类问题体现了模型思想,需要学生综合运用知识、灵活使用方法解决问题,此外,学生还要具有抽象概括能力、计算求解能力以及运用数形结合思想解决问题的能力。同学们要不断反思、归纳、总结,全面提升。

在复习过程中,学生不仅要关注知识本身,还需要多思考知识间的联系,特别是其蕴含的思想方法,经历知识的“再发现”过程,逐步提高思考力,养成用数学的思想和方法来思考和处理问题的习惯,不断提升学习能力。

难点解析

二次函数的图象是轴对称图形,图象上纵坐标相等的两个点关于对称轴对称。反之,关于对称轴对称的两个点的纵坐标相等,且这两个点到对称轴的距离相等。二次函数对称性相关题目多样灵活,既抽象又难以理解。这部分是难点,也是初中中考的重要考查内容之一。学生可以借助数形结合这一思想将抽象的数学问题直观化,化繁为简,从而打开思路,找到解题的突破口。

1. 二次函数对称性的相关结论

二次函数的对称轴,是任意一对对称点所连线段的垂直平分线(如图1),其表示有:

(1)一般式

$$y=ax^2+bx+c: \text{直线 } x=-\frac{b}{2a};$$

(2)顶点式

$$y=a(x-h)^2+k: \text{直线 } x=h;$$

(3)对称点 $(x_1, y), (x_2, y)$:

$$\text{直线 } x=\frac{x_1+x_2}{2}.$$

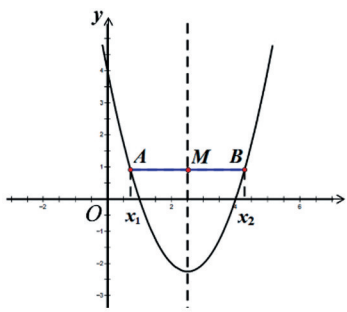


图1

2. 利用二次函数对称性解决问题

例1 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ($a\neq 0$) 中,函数 y 与自变量 x 之间的部分对应值如下表所示:

x	...	0	1	2	3	...
y	...	5	2	1	2	...

该二次函数的图象与 x 轴有_____个交点.

分析:根据抛物线上纵坐标相等的两个点关于对称轴对称可知,表格中(1,2)和(3,2)是对称点,从而得到抛物线的对称轴为直线 $x=\frac{1+3}{2}=2$. 再把表格中的点在坐标系中描出来(如图2),即可画出大致图象,根据图象可直观得出该二次函数的图象与 x 轴有0个交点.

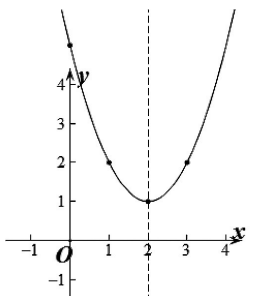


图2

例2【2018北京中考题】跳台滑雪是冬季奥运会比赛项目之一。运动员起跳后的飞行路线可以看作是抛物线的一部分,运动员起跳后的竖

直高度 y (单位:m)与水平距离 x (单位:m)近似满足函数关系 $y=ax^2+bx+c$ ($a\neq 0$)。图3记录了某运动员起跳后的 x 与 y 的三组数据,根据上述函数模型和数据,可推断出该运动员起跳后飞行到最高点时,水平距离为()

- A. 10m B. 15m
C. 20m D. 22.5m

分析:根据题意可知抛物线开口向下,观察图3中三个点的位置,点(0,54.0)和(40,46.2)在对称轴两侧。当抛物线开口向下时,抛物线上的点的位置越接近最高点,离对称轴越近,即点的纵坐标越大,点的位置离对称轴越近,因此点(0,54.0)更靠近对称轴,可知对称轴与 x 轴的交点横坐标在0和20之间,点(0,54.0)和(20,57.9)在对称轴两侧,且点(20,57.9)更靠近对称轴,可知对称轴与 x 轴的交点的横坐标在10和20之间,故选B.

此题还可以用待定系数法求解出抛物线的解析式,从而得到顶点坐标,求出该运动员起跳后飞行到最高点时的水平距离。方法可行但计算量大,而结合图象,利用二次函数的对称性能够快捷地选出答案。

例3 函数 $y=ax^2+2ax+m$ ($a<0$) 的图象过点(2,0),则使函数值 $y<0$ 成立的 x 的取值范围是()

- A. $x<-4$ 或 $x>2$ B. $-4<x<2$
C. $x<0$ 或 $x>2$ D. $0<x<2$

分析:由解析式可知抛物线图象开口向下,对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{2a}{2a}=-1$,又因图象过点(2,0),根据抛物线的对称性可知图象还经过点(-4,0),即可画出大致图象(如图4),根据图象可直观得出使函数值 $y<0$ 成立的 x 的取值范围是 $x<-4$ 或 $x>2$,故选A.

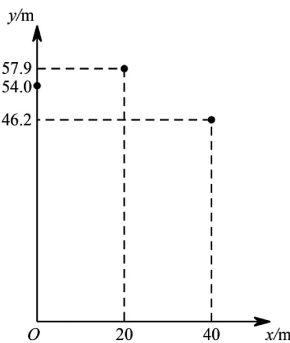


图3

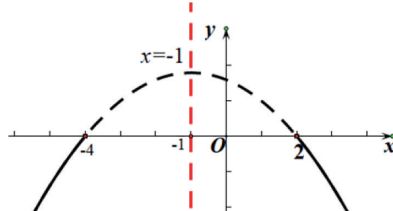


图4