



数 学

五方面入手解好几何证明题

北京市陈经纶中学 胡宝田

初中学考几何综合证明试题是学生在备考过程中经常遇到的难点之一,这类题目往往要求学生具备较强的逻辑推理能力和空间想象能力,并熟练掌握几何定理。

一、学生失误与解题痛点

通过梳理发现,学生在几何综合试题做题过程中,比较典型的错误主要有如下几点。

学生失误原因	具体内容分析
概念理解不透彻	学生可能对一些基本几何概念(如平行、垂直、全等、相似等)的理解不够深入,导致在证明过程中无法准确应用
逻辑推理混乱	缺乏清晰的逻辑链条,证明步骤跳跃或因因果关系不明,使得论证过程难以令人信服
定理记忆不准确	对几何定理记忆模糊或混淆,使用错误的定理进行证明
辅助线添加不当	在需要构造辅助线以简化问题时,学生可能不知道如何添加或者添加了无效的辅助线,反而使问题复杂化
空间想象力不足	对于立体几何问题,缺乏足够的空间想象能力,难以构建正确的图形模型

二、解决问题的方法与策略

解决学生几何综合试题的难点,提升解题正确率,可以从巩固基础概念、强化逻辑训练、精准记忆定理、掌握辅助线技巧和提升空间想象等五方面入手。

从巩固基础概念入手。学生要系统复习并深刻理解几何的基本概念,确保每个定义、性质都能准确无误地理解和应用。

从强化逻辑训练入手。学生在练习时要注重每一步推导的逻辑性,确保每一步都有充分的理由支持,可以尝试写出详细过程,甚至口头解释给他人听,以此来检验逻辑的严密性。

从精准记忆定理入手。学生要记住定理的内容,更要理解其适用条件和推导过程,通过制作定理卡片、定期复习等方式加深记忆。

从掌握辅助线技巧入手。学生可通过大量练习,学习常见的辅助线添加方法,理解其背后的几何原理,逐渐培养直觉,知道在什么情况下应该考虑添加何种类型的辅助线。

从提升空间想象入手。学生要多做立体几何模型的拼接、拆解练习,利用实物模型或软件辅助,增强空间思维能力。具体操作实践如下。

1. 巩固基础,强化记忆

学生要定期复习几何基本概念、性质、定理和公式,通过制作思维导图或笔记卡片帮助记忆,整理一份“几何公式速查表”,包括但不限于勾股定理、圆的性质、相似三角形的判定与性质等,每天抽时间复习。

2. 提升空间想象力

学生可多做实物模型操作或利用软件(如GeoGebra)构建几何模型,通过动手实践加深理解。例如使用纸张折叠成各种立体图形,如正方体、长方体等,观察并理解其面、边、顶点的关系。

3. 培养解题思路

学生可进行分类练习,针对不同类型的几何题目(如证明题、计算题、作图题),总结解题模板和思路。例如对于证明题,先识别题目类型(如相似、全等、面积比等),然后应用相应的解题框架,如“已知—求证—分析—证明”。

4. 加强应用能力训练

学生要大量练习综合应用题目,尤其是历年初中学考真题和模拟题,注重分析题目条件与所学知识的关联。例如遇到一道包含多个几何元素的题目时,学生可先标记出所有已知条件,尝试用不同的定理进行试错,逐渐缩小解题范围,最终确定最优解法。

三、典型试题解析方法和思路详解

(2024年初中学考) 已知 $\angle MAN = \alpha$ ($0^\circ < \alpha < 45^\circ$), 点 B, C 分别在射线 AN, AM 上,将线段 BC 绕点 B 顺时针旋转 $180^\circ - 2\alpha$ 得到线段 BD ,过点 D 作 AN 的垂线交射线 AM 于点 E 。

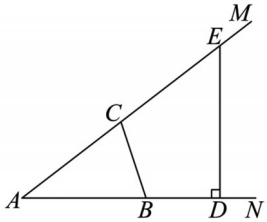


图 1

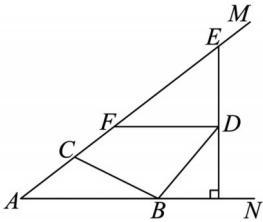


图 2

(1)如图1,当点 D 在射线 AN 上时,求证: C 是 AE 的中点;

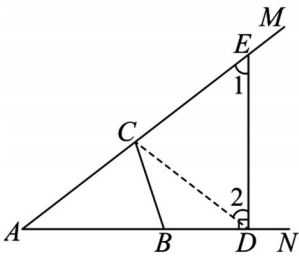
(2)如图2,当点 D 在 $\angle MAN$ 内部时,作 $DF \parallel AN$,交射线 AM 于点 F ,用等式表示线段 EF 与 AC 的数量关系,并证明。

【分析】 本题考查了旋转的性质、全等三角形的判定与性质、三角形的内角和、外角定理、平行线的性质、直角三角形的性质,学生熟练掌握这些知识点,正确添加辅助线是解题的关键。

(1)先根据等腰三角形的性质以及三角形内角和定理求得 $\angle BDC = \frac{180^\circ - (180^\circ - 2\alpha)}{2} = \alpha$,则 $\angle BDC = \angle A$,故 $CA = CD$,再根据等角的余角相等即可得到 $\angle 1 = \angle 2$,故 $CD = CE$,最后等量代换出 $CA = CE$,即点 C 是 AE 的中点;

(2)在射线 AM 上取点 H ,使得 $BH = BA$,取 EF 的中点 G ,连接 DG ,可证明 $\triangle ABC \cong \triangle HBD$,则 $AC = DH$, $\angle BHD = \angle A = \alpha$,则 $\angle FHD = 2\alpha$,根据平行线的性质以及等腰三角形的性质得到 $\angle HGD = 2\alpha$,则 $DG = DH$,而 $EF = 2GD$,故可等量代换出 $EF = 2AC$ 。

【详解】 (1)证明:连接 CD ,

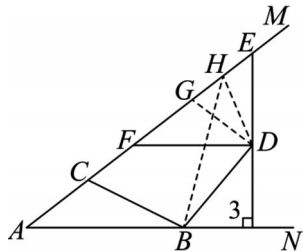


由题意得: $BC = BD, \angle CBD = 180^\circ - 2\alpha$,
 $\therefore \angle BDC = \angle BCD$,
 $\therefore \angle BDC + \angle BCD + \angle CBD = 180^\circ$,
 $\therefore \angle BDC = \frac{180^\circ - (180^\circ - 2\alpha)}{2} = \alpha$,
 $\therefore \angle BDC = \angle A$,
 $\therefore CA = CD$,
 $\therefore DE \perp AN$,

$\therefore \angle 1 + \angle A = \angle 2 + \angle BDC = 90^\circ$,
 $\therefore \angle 1 = \angle 2$,
 $\therefore CD = CE$,
 $\therefore CA = CE$,
 $\therefore$ 点 C 是 AE 的中点;

(2)解: $EF = 2AC$,

在射线 AM 上取点 H ,使得 $BH = BA$,取 EF 的中点 G ,连接 DG ,



$\therefore BH = BA$,
 $\therefore \angle BAH = \angle BHA = \alpha$,
 $\therefore \angle ABH = 180^\circ - 2\alpha = \angle CBD$,
 $\therefore \angle ABC = \angle HBD$,
又 $\because BC = BD$,
 $\therefore \triangle ABC \cong \triangle HBD$,
 $\therefore AC = DH, \angle BAH = \angle A = \alpha$,
 $\therefore \angle FHD = \angle BHA + \angle BHD = 2\alpha$,
 $\therefore DF \parallel AN$,
 $\therefore \angle EFD = \angle A = \alpha, \angle EDF = \angle 3 = 90^\circ$
 $\therefore G$ 是 EF 的中点,
 $\therefore GF = GD, EF = 2GD$,
 $\therefore \angle GFD = \angle GDF = \alpha$,
 $\therefore \angle HGD = 2\alpha$,
 $\therefore \angle HGD = \angle FHD$,
 $\therefore DG = DH$,
 $\therefore AC = DH$,
 $\therefore DG = AC$,
 $\therefore EF = 2AC$.

【反思】 证明线段相等,是几何综合题中非常重要的类型,下面,笔者对此进行系统的总结和归纳。

从角度考虑:在同一三角形中等角对等边;同圆(或等圆)中借助圆周角、圆心角相等得到其所对的弦相等。

从线段考虑:线段中垂线上的点到线段两端点的距离相等;角平分线上的点到角的两边的距离相等;平行的两条直线间的距离处处相等;关于某直线(或某点)对称的两点到直线(或某点)的距离相等;圆的垂径平分弦得到的两条线段相等;从圆外一点引圆的两条切线长度相等。

从图形考虑:全等图形的对应边相等;直角三角形中,斜边上的中线等于斜边一半;含 30° 角的直角三角形的斜边是 30° 角所对边的二倍;三角形和梯形中位线和底边的关系;平行四边形(当然包括矩形、菱形、正方形)的对边相等,对角线互相平分等;正多边形(如正方形、正六边形等)中边与对角线、对角线与对角线之间的相等、和差、倍分关系。

从几何变换的角度考虑:如旋转、对称、平移三大几何变换涉及的基本模型中产生的相等线段,以及在解题中总结的与此相关的各类模型中的相等线段。

这些线段相等的证明方法是建立在基本几何模型基础上的,需要学生在平时的学习中反复体会、深入总结,以期达到熟练应用的目的。

学生进行证明时,要强调基础概念的应用、逻辑推理的严谨性和对定理的精确掌握。通过类似题目的练习,可以有效提升解决几何综合证明题的能力。