

数学

海淀一模后三道解答题分析

北京大学附属中学 单治超

2024年海淀区数学一模最后三道解答题综合性强、创新点多、难度较大.本文对这三道题进行分析,希望在高考备考冲刺阶段能为考生提高数学成绩提供帮助.

第19题:已知椭圆 $G: x^2 + my^2 = m$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, A_1, A_2 分别是 G 的左、右顶点, F 是 G 的右焦点.

(I) 求 m 的值及点 F 的坐标;

(II) 设 P 是椭圆 G 上异于顶点的动点, 点 Q 在直线 $x=2$ 上, 且 $PF \perp FQ$, 直线 PQ 与 x 轴交于点 M . 比较 $|MP|^2$ 与 $|MA_1| \cdot |MA_2|$ 的大小.

解答: (I) m 的值为 2, 点 F 的坐标为 $(1, 0)$. (步骤略)

(II) 考生首先要考虑的是设点还是设线. 题目中没有出现直线与椭圆的两个交点, 因此应该设点. 接下来要考虑设哪个点为变元. 题目中有三个动点 P, Q, M . 把椭圆上的点 P 设为变元, 可以方便地表示出 Q, M 两点坐标. 于是设 $P(x_0, y_0)$ ($x_0 y_0 \neq 0$).

下面考生就可以按部就班地去表示 Q, M 两点坐标, 但首先必须表示出 Q 的坐标:

设 $Q(2, y_0)$, 因为 $PF \perp FQ$, 所以 $(x_0 - 1, y_0) \cdot (1, y_0) = 0$, 所以 $y_0 = \frac{1 - x_0}{y_0}$.

这里利用 $PF \perp FQ$ 这一条件时采用了向量的数量积工具, 比求出直线 FQ 的方程再与直线 $x=2$ 求交点更快捷.

再表示出 M 的坐标:

设 $M(x_M, 0)$, 因为 Q, P, M 三点共线, 所以 $\frac{y_0 - y_0}{2 - x_0} = \frac{y_0}{x_0 - x_M}$.

这里三点共线的条件直接翻译, 同样不必求直线 PQ 的方程.

于是 $x_M = x_0 - \frac{(2 - x_0)y_0}{y_0 - y_0} = x_0 - \frac{(2 - x_0)y_0}{1 - x_0 - y_0} =$

$x_0 - \frac{(2 - x_0)y_0^2}{1 - x_0 - y_0^2}$.

变形到这一步, 考生会发现 x_M 的表达式里同时出现了 x_0 的一次项和二次项, 但只出现了 y_0 的二次项而没有出现 y_0 的一次项. 这是因为把 P 变为它的对称点后显然不影响 M 的坐标. 遇到这种情况, 就应该利用 P 在椭圆上, $x_0^2 + 2y_0^2 = 2$, 及时地进行消元, 消去 y_0^2 . 这样后续的讨论就是关于 x_0 的单变量问题. 如果不及时消元, 后面的表达式繁琐且容易在变形中出错.

$x_M = x_0 - \frac{(2 - x_0)y_0^2}{1 - x_0 - y_0^2} = x_0 - \frac{(2 - x_0)(1 - \frac{x_0^2}{2})}{1 - x_0 - (1 - \frac{x_0^2}{2})} =$

$x_0 - \frac{(2 - x_0)(2 - x_0^2)}{x_0^2 - 2x_0} = x_0 + \frac{2 - x_0^2}{x_0} = \frac{2}{x_0}.$

$|MP|^2 - |MA_1| \cdot |MA_2| = (x_0 - \frac{2}{x_0})^2 + y_0^2 - (\frac{2}{x_0} + \sqrt{2})$

$(\frac{2}{x_0} - \sqrt{2}) = (x_0^2 - 4 + \frac{4}{x_0^2}) + (1 - \frac{x_0^2}{2}) - (\frac{4}{x_0^2} - 2) =$

$\frac{x_0^2}{2} - 1 < 0,$

所以 $|MP|^2 < |MA_1| \cdot |MA_2|$.

最终结果是个不等式, 有些出乎意料. 事实上, 考生通过图形可以发现, 把 P 替换为直线 PF 与椭圆的另一交点时点 M 的位置不变, 但是 $|MP|$ 会发生变化. 因此结论不可能是等式.

解析几何解答题最终结论是个不等关系的情况比较少见, 本题有显著的创新点.

第20题:已知函数 $f(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$.

(I) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(II) 若函数 $g(x) = |f(x) + e^{-2}a|$, $x \in (0, +\infty)$ 存在最大值, 求 a 的取值范围.

解答: (I) 简要表述:

$f'(x) = (1 - \frac{x}{2})e^{-\frac{1}{2}x}$, 所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty, 2)$, 单调递减区间是 $(2, +\infty)$.

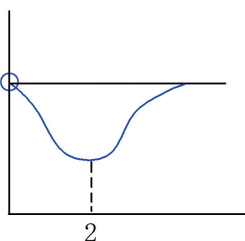
(II) 考生要借助几何进行思考. 函数 $g(x)$ 的图象是对函数 $f(x)$ 在 y 轴右侧部分的图象进行上下平移, 再把 x 轴下方的部分翻折下去得到的.

由第I问我们已经知道函数 $f(x)$ 图象的大致轮廓. $f(0) = 0$, 向右先增长到最大值 $f(2) = 2e^{-1}$, 再递减, 但是永远大于 0, 以 x 轴为渐近线.

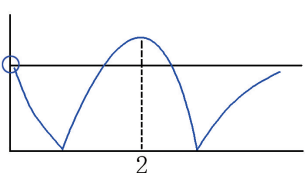
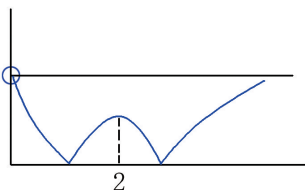
首先, $a \geq 0$ 时, $g(x) = f(x) + e^{-2}a$, $x \in (0, +\infty)$ 存在最大值 $g(2)$.

考生要先把绝对值号可以直接拿掉的最简单情形讨论清楚.

如果 $g(2) \leq 0$, $g(x)$ 图象大致轮廓如下, 此时 $g(x)$ 不存在最大值.



如果 $a < 0$ 且 $g(2) > 0$, $g(x)$ 存在最大值当且仅当 $g(2) \geq -e^{-2}a$, 看下面的图形.



不等式 $g(2) \geq -e^{-2}a$ 等价于 $e^{-1} + e^{-2}a \geq 0$, 易见 $a = -1$ 时等号成立, 且不等式左边是关于 a 的增函数. 故 $-1 \leq a < 0$.

综上, a 的取值范围是 $[-1, +\infty)$.

用导数研究函数的性质, 核心在于单调性. 而绘制函数图象的大致轮廓能够把函数的很多性质暴露出来, 在解决导数解答题时非常有用.

第21题(部分):已知 $Q: a_1, a_2, \dots, a_m^2$ ($m \geq 2$, $m \in \mathbb{N}^+$) 为有穷正整数数列, 其最大项的值为 m , 且当 $k=0, 1, \dots, m-1$ 时, 均有 $a_{km+i} \neq a_{km+j}$ ($1 \leq i < j \leq m$). 设 $b_0 = 0$, 对于 $t \in \{0, 1, \dots, m-1\}$, 定义 $b_{t+1} = \min\{n | n > b_t, a_n > t\}$, 其中, $\min M$ 表示数集 M 中最小的数.

(I) 若 $Q: 3, 1, 2, 2, 1, 3, 1, 2, 3$, 写出 b_1, b_3 的值;

(II) 若存在 Q 满足: $b_1 + b_2 + b_3 = 11$, 求 m 的最小值.

解答: 这道数列新定义题在题干中出现了大量符号, 令人眼花缭乱, 考生如果读不懂, 连第I问都很难做出来. 遇到符号多的时候, 可以考虑逐句翻译成文字语言.

这是一个项数为 m^2 的正整数列, 而且最大项是 m . 当 $k=0, 1, \dots, m-1$ 时, 均有 $a_{km+i} \neq a_{km+j}$ ($1 \leq i < j \leq m$). 把 k 特殊化, 看看这句话表达的是什么意思: $k=0$ 时, 那就是 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 互不相等; $k=1$ 时, 那就是 $a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_{2m}$ 互不相等. 原来是说把 m^2 项等分成 m 段, 每段中的 m 项互不相等. 更确切地说, 每一段中 $1, 2, \dots, m$ 都恰好出现了一次.

$\{b_n\}$ 这一有穷数列是递归定义的. $b_{t+1} = \min\{n | n > b_t, a_n > t\}$ 这一定义式如何理解? 对数列 $\{a_n\}$ 中满足一定条件的若干项的序号取最小值, 在21题中经常出现, 考生可以直观地理解为“首次出现的时刻”. 按照这种理解, b_{t+1} 就是时刻 b_t 之后, 数列 $\{a_n\}$ 首次大于 t 的时刻.

之后就可以做第I问了: $b_1 = 1, b_2 = 3, b_3 = 6$.

第II问求 m 的最小值. 既然 b_1, b_2, b_3 都有定义, 那么一定有 $m \geq 3$.

考虑命题人心理. $m=3$ 时应该不可能存在 Q 满足 $b_1 + b_2 + b_3 = 11$, 否则构造一下题目就太简单了. 大胆地猜测 m 的最小值是 4, 这样既考查了一个不存在性的证明, 又考查了一个存在性的证明, 比较符合21题第II问的难度.

事实上, 在前面的文字翻译基础上, 不难证明 $m=3$ 时不可能存在 Q 满足 $b_1 + b_2 + b_3 = 11$. 首先 $b_1 = 1$ 是定值. 因为 $a_2 \neq a_3$ 且均为正整数, 所以 a_2, a_3 至少一项大于 1, 所以 $b_2 \leq 3$. 因为 a_4, a_5, a_6 是互不相等的正整数, 所以必有一项大于 2, 所以 $b_3 \leq 6$. 于是 $b_1 + b_2 + b_3 \leq 10$.

$m=4$ 时构造 Q 满足 $b_1 + b_2 + b_3 = 11$, 说白了就是希望 b_2, b_3 大一点. 由于 $b_1 = 1$ 是定值, 希望 $b_2 + b_3 = 10$. 同 $m=3$ 时的讨论, $b_2 \leq 3$, 当且仅当 $a_2 = 1$ 时取等号. a_5, a_6, a_7, a_8 是互不相等的正整数, 其中首次大于 2 的时刻不大于 7, 因此 $b_3 \leq 7$. 于是就是要构造 $b_2 = 3, b_3 = 7$ 的数列 Q . 那就令 $a_2 = 1$, 且 a_4, a_5, a_6 均取值于 $1, 2$. 例如 $Q: 4, 1, 3, 2, 2, 1, 3, 4, \dots$ 即可.

综上, m 的最小值是 4.

有能力的考生对这些综合性强、有创新的题目进行深入反思, 一定会取得很多收获.