数 学

隐零点的替代以及放缩法在函数综合问题中的应用

北京市昌平区第二中学高级教师 刘 晶

高三数学复习课一般采用“章节—专题—模拟”的三轮教学进行，即一轮按照章节顺序对基础知识和基本方法进行系统梳理，帮助考生夯实基础；二轮则以专题复习、习题讲评的形式出现，帮助考生提升思维；三轮重在模拟和训练，以求快速正确地解题。

目前正处于高三数学复习的专题复习阶段，在这一阶段，老师们将以“数学思想方法”“解题策略”“应试技巧”为主线，结合学情有机选取专题，帮助考生提高知识与能力的综合性、应用性和创新性。考生在本阶段应结合每个专题，总结归纳对应的解题方法和技巧。

本文将以一道例题为载体，使考生体会隐零点的替代以及放缩法在函数综合问题中的应用，为大家的高考复习助力。

【例题】已知函数 $f(x)=\frac{\ln x-1}{x}-ax$（$a\in\mathbf{R}$）.

（Ⅰ）若 $a<-1$，求函数 $y=f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）若 $1<a<2$，求证：$f(x)<-1$.

一、落实基本方法

考生可体会求函数单调区间、解决恒成立问题、确定隐零点所在区间以及用隐零点的替代求函数最值的方法.

【思路】第（Ⅰ）问可以求导后根据导函数的正负求出函数 $y=f(x)$ 的单调区间.

第（Ⅱ）问是一个恒成立问题，先构造最优函数后再转化为最值问题，进而发挥导数的工具性作用研究函数的最值问题，从而解决问题，在求最值的过程中考生将体会到隐零点的替代功能。以下提供三种构造函数的方案。

方案一：要证 $f(x)<-1$，只需证明 $f(x)_{\max}<-1$；

方案二：由 $x>0$，只需证明 $ax^2-x+1-\ln x>0$.设 $h(x)=ax^2-x+1-\ln x$，只需证 $h(x)>0$ 成立.

方案三：由 $x>0$，只需证明 $a>\frac{\ln x+x-1}{x^2}$ 成立，设 $h(x)=\frac{\ln x+x-1}{x^2}$，$x>0$，只需证明 $a>h(x)_{\max}$.

解：（Ⅰ）$x\in(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{2-ax^2-\ln x}{x^2}$.

令 $g(x)=2-ax^2-\ln x$，则 $g'(x)=\frac{-2ax^2-1}{x}$.

令 $g'(x)=0$，得 $x_0=\sqrt{\frac{1}{-2a}}$.（依题意 $-\frac{1}{2a}>0$）

x	$(0,x_0)$	x_0	$(x_0,+\infty)$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	极小值	↗

所以，$g(x)_{\min}=g(\sqrt{-\frac{1}{2a}})=\frac{5}{2}-\ln\sqrt{-\frac{1}{2a}}$.

因为 $a<-1$，所以 $0<-\frac{1}{2a}<\frac{1}{2}$，$\ln\sqrt{-\frac{1}{2a}}<0$.

所以 $g(x)>0$，即 $f'(x)>0$.

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为（$0,+\infty$）.无减区间.

（Ⅱ）方法一：要证 $f(x)<-1$，只需证明 $f(x)_{\max}<-1$，

$\because 1<a<2 \therefore$ 由（Ⅰ）知 $g'(x)=\frac{-2ax^2-1}{x}<0$ 恒成立，

即 $g(x)$ 在（$0,+\infty$）上单调递减.

$\because g(1)=2-a>0$，$g(e)=1-ae^2<0$

$\therefore$ 存在 $x_0\in(1,e)$，使得 $g'(x_0)=0$，即 $f'(x_0)=0$ 且 $\ln x_0=-ax_0^{\ 2}+2$

x	$(0,x_0)$	x_0	$(x_0,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	极大值	↘

$\therefore f(x)_{\max}=f(x_0)=\frac{\ln x_0-1}{x_0}-ax_0=\frac{-ax_0^{\ 2}+1}{x_0}-ax_0=-2ax_0+\frac{1}{x_0}$

$\because x_0>1, a>1 \quad \therefore \frac{1}{x_0}<1, -2ax_0<-2$

$\therefore f(x)_{\max}=f(x_0)<-1$

$\therefore$ 若 $1<a<2$，则 $f(x)<-1$

方法二：由 $x>0$，要证 $f(x)<-1$ 成立，只需证明 $ax^2-x+1-\ln x>0$.

设 $h(x)=ax^2-x+1-\ln x>0$，只需证 $h(x)>0$ 成立.

因为 $h'(x)=2ax-1-\frac{1}{x}=\frac{2ax^2-x-1}{x}$，$1<a<2$，

由 $h'(x)=0$，得 $2ax^2-x-1=0$ 有异号两根.

令其正根为 x_0，则 $2ax_0^{\ 2}-x_0-1=0$.

在（$0,x_0$）上 $h'(x)<0$，在（$x_0,+\infty$）上 $h'(x)>0$.

则 $h(x)$ 的最小值为 $h(x_0)=ax_0^{\ 2}-x_0+1-\ln x_0=\frac{1+x_0}{2}-x_0+1-\ln x_0=\frac{3-x_0}{2}-\ln x_0$.

又 $h'(1)=2a-2>0$，$h'(\frac{1}{2})=2(\frac{a}{2}-\frac{3}{2})=a-3<0$，

所以 $\frac{1}{2}<x_0<1$.则 $\frac{3-x_0}{2}>0$，$-\ln x_0>0$.

因此 $\frac{3-x_0}{2}-\ln x_0>0$，即 $h(x_0)>0$.所以 $h(x)>0$，$f(x)<-1$.

方法三：由 $x>0$，要证 $f(x)<-1$ 成立，只需证明 $a>\frac{\ln x+x-1}{x^2}$ 成立.

设 $h(x)=\frac{\ln x+x-1}{x^2}$，$x>0$，只需证明 $a>h(x)_{\max}$.

$h'(x)=\frac{-2\ln x-x+3}{x^3}$，$\because x^3>0 \therefore h'(x)$ 的正负与 $m(x)=-2\ln x-x+3$ 相同

$\because m'(x)=-\frac{2}{x}-1<0$，$\therefore m(x)$ 在（$0,+\infty$）上单调递减.

又 $\because m(1)=2>0$，$m(e)=1-e<0$，$\therefore$ 存在 $x_0\in(1,e)$，使得 $m(x_0)=0$，即 $h'(x_0)=0$ 且 $\ln x_0=\frac{3-x_0}{2}$.

x	$(0,x_0)$	x_0	$(x_0,+\infty)$
$h'(x)$	$+$	0	$-$
$h(x)$	↗	极大值	↘

$\therefore h(x)_{\max}=h(x_0)=\frac{\ln x_0+x_0-1}{x_0^{\ 2}}=\frac{\frac{3-x_0}{2}+x_0-1}{x_0^{\ 2}}=\frac{1}{2}(\frac{1}{x_0^{\ 2}}+\frac{1}{x_0})=\frac{1}{2}(\frac{1}{x_0}+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{8}$

$\because x_0\in(1,e)$，$\therefore \frac{1}{x_0}\in(\frac{1}{e},1)$，$\therefore h(x_0)<1$

$\because 1<a<2$，$\therefore a>h(x)$ 恒成立，即若 $1<a<2$，则 $f(x)<-1$

二、体会放缩法的基本策略

放缩法策略：

（1）化动为静

（2）化曲为直
$$\begin{cases}\text{基本初等函数间的关系} & \begin{cases}e^x>x>\ln x\\ x^3>x^2>x>\sqrt{x},\ x\in(1,+\infty)\\ \tan x>x>\sin x,\ x\in(0,\frac{\pi}{2})\end{cases}\\ \text{曲线的切线} & \begin{cases}\ln x\leqslant x-1\\ e^x>x+1\end{cases}\\ \text{均值定理} & \sqrt{x+1}\leqslant\frac{x+2}{2}\end{cases}$$

本题两问依据以上放缩法策略，详解如下：

解：（Ⅰ）方法一：化动为静

$x\in(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{2-ax^2-\ln x}{x^2}$.

$\because x^2>0 \therefore f'(x)$ 的正负与 $2-ax^2-\ln x$ 相同.

$\because a<-1 \therefore 2-ax^2-\ln x>2+x^2-\ln x$.

令 $g(x)=2+x^2-\ln x$，则 $g'(x)=2x-\frac{1}{x}=\frac{2x^2-1}{x}$.

令 $g'(x)=0$，得 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.（依题意 $-\frac{1}{2a}>0$）

x	$(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty)$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	极小值	↗

所以，$g(x)_{\min}=g(\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{5}{2}-\ln\frac{\sqrt{2}}{2}>0$.

所以 $g(x)>0$，即 $f'(x)>0$.

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为（$0,+\infty$）.无减区间.

方法二：化曲为直

$x\in(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{2-ax^2-\ln x}{x^2}$.

$\because x^2>0 \therefore f'(x)$ 的正负与 $2-ax^2-\ln x$ 相同

$\because \ln x<x$，$\therefore -\ln x>-x$（考试时需证明）

$\therefore 2-ax^2-\ln x>2-ax^2-x$

令 $g(x)=-ax^2-x+2$，$\therefore \Delta=1+8a<0$ 且二次函数开口向上 $\therefore g(x)>0$ 恒成立，即 $f'(x)>0$.

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为（$0,+\infty$）.无减区间.

方法三：化曲为直

$x\in(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{2-ax^2-\ln x}{x^2}$.

$\because x^2>0 \therefore f'(x)$ 的正负与 $2-ax^2-\ln x$ 相同

$\because \ln x<x-1$，$\therefore -\ln x>-x+1$（考试时需证明）

$2-ax^2-\ln x\geqslant 2-ax^2-x+1$

令 $g(x)=-ax^2-x+3$，$\because \Delta=1+12a<0$ 且二次函数开口向上

$\therefore g(x)>0$ 恒成立，即 $f'(x)>0$.

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为（$0,+\infty$）.无减区间.

（Ⅱ）方法一：化动为静

由 $x>0$，要证 $f(x)<-1$ 成立，只需证明 $ax^2-x+1-\ln x>0$.

$\because 1<a<2$，$\therefore ax^2>x^2$

$\therefore$ 只需证明 $x^2-x+1-\ln x>0$ 恒成立.

设 $h(x)=x^2-x+1-\ln x$，$x>0$

$h'(x)=2x-1-\frac{1}{x}=\frac{2x^2-x-1}{x}=\frac{(2x+1)\cdot(x-1)}{x}$

$\because x>0$，$\therefore h'(x)$ 的正负由 $x-1$ 决定，令 $h'(x)=0$，则 $x=1$

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘	极小值	↗

$\therefore h(x)_{\min}=h(1)=1$

$\therefore h(x)>h(x)_{\min}=1>0$ 恒成立，即若 $1<a<2$，则 $f(x)<-1$

方法二：化曲为直

由 $x>0$，要证 $f(x)<-1$ 成立，只需证明 $ax^2-x+1-\ln x>0$.

$\because \ln x<x$，$\therefore -\ln x>-x$（考试时需证明）

$\therefore$ 只需证明 $ax^2-2x+1>0$ 恒成立.

令 $g(x)=ax^2-2x+1$，$\because \Delta=4-4a<0$ 且二次函数开口向上

$\therefore g(x)>0$ 恒成立，即 $ax^2-x+1-\ln x>0$.即若 $1<a<2$，则 $f(x)<-1$

方法三：化动为静和化曲为直的综合运用

由 $x>0$，要证 $f(x)<-1$ 成立，只需证明 $ax^2-x+1-\ln x>0$.

$\because 1<a<2$，$\therefore ax^2>x^2$

$\because \ln x<x$，$\therefore -\ln x>-x$（考试时需证明）

$\therefore ax^2-x+1-\ln x>x^2-2x+1$

$\because x^2-2x+1=(x-1)^2\geqslant 0$

$\therefore ax^2-x+1-\ln x>0$ 恒成立，即若 $1<a<2$，则 $f(x)<-1$.

以上通过一道例题为载体，带领考生体会了求函数单调区间的方法、解决恒成立问题的策略、如何确定隐零点所在区间以及隐零点的替代功能在求函数最值中的作用和运用放缩法解决问题的优势，考生要在二轮专题复习中重视并总结归纳解题方法和技巧。

责编/胡梦蝶 版式/罗京京 热线/59102872 邮箱/kaoshibao@bjeea.cn