数 学

建立方程知识结构 突破学习难点

——一元二次方程学习建议

北京师范大学三帆中学朝阳学校教师 刘 琦

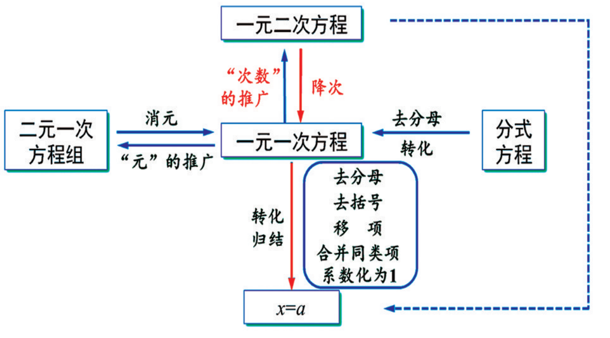
一元二次方程在中学数学中占有非常重要的地位，上承一元一次方程、多项式乘法及因式分解的知识，下接二次函数等其他内容。本文首先对一元二次方程这一章的知识结构进行梳理，再从根的判别式的概念出发，总结根的判别式在一元二次方程中的若干应用，帮助考生积累方法，突破本章学习难点，最后再为考生提供一些复习建议，为后续内容的学习奠定基础。

知识梳理

一元二次方程是初中数学中重要的数学模型之一，它有丰富的实际背景，从实际问题中抽象出数量关系，列出一元二次方程，求出它的根进而解决实际问题，是本章学习的主线.

本章的学习重点是解一元二次方程.一元二次方程是初中阶段一类重要的方程.在此前，我们已经学习了一元一次方程、二元一次方程组，其中，二元一次方程组可以看成是一元一次方程在"元"上的推广，自然地，一元二次方程是一元一次方程在"次"上的推广.

在求解一元一次方程时，利用等式的基本性质、运算律，可以将其不断转化，最终化归为$x=a$的形式，获得方程的解；在求解二元一次方程组时，我们借助一些方法进行"消元"将其转化成一元一次方程，进而求解；在求解一元二次方程时，把握其基本思想的降"次"，通过配方、因式分解等，将一个一元二次方程转化为两个一元一次方程来解.



难点突破

一元二次方程根的判别式联通广泛，是近些年学考的高频考点.它不仅仅是解一元二次方程的关键，也是解决后续一些相关问题的依据，如在将来研究二次函数图象与直线交点时，一元二次方程根的判别式会显现出"以数驭形"的威力.

1.一元二次方程根的判别式的概念

一般地，式子b^2-4ac叫做一元二次方程$ax^2+bx+c=0$根的判别式，通常用希腊字母"Δ"表示它，即$\Delta=b^2-4ac$.

对于一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$：

$\Delta>0\Leftrightarrow$ 方程有两个不等的实数根；

$\Delta=0\Leftrightarrow$ 方程有两个相等的实数根；

$\Delta<0\Leftrightarrow$ 方程无实数根.

2.一元二次方程根的判别式的应用举例

（1）利用判别式判断下列方程根的情况.

例1 不解方程，判断下列方程根的情况.

（1）$2x^2-4x=-2$ （2）$x(x+3)+4=0$

（3）$x^2+2x-2=0$

分析：题目中要求是不解方程，但是解答时需要有"化为一般式"的过程，这是明确"a、b、c"的关键步骤，在此基础上计算根的判别式b^2-4ac进行判定.如果题目中的$a>0$，$c<0$，即a，c异号时，根据$\Delta=b^2-4ac$，可判断Δ一定大于0，那么方程一定有两个不相等的实数根.

解答：（1）方程化为一般式为：$2x^2-4x+2=0$

$\because a=2,b=-4,c=2,$

$\therefore \Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times2\times2=0,$

∴原方程有两个相等的实数根.

（2）方程化为一般式为：$x^2+3x+4=0$

$\because a=1,b=3,c=4,$

$\therefore \Delta=b^2-4ac=3^2-4\times1\times4=-7,$

$\because -7<0,$

∴原方程无实数根.

（3）$\because a=1,b=2,c=-2,$

$\therefore \Delta=b^2-4ac=2^2-4\times1\times(-2)=12,$

$\because 12>0,$

∴原方程有两个不等的实数根.

例2 利用判别式完成下列证明.

（1）关于x的一元二次方程$x^2-(2k-1)x+k^2-1=0$，其中$k<0$.

求证：方程有两个不相等的实数根.

分析：先根据根的判别式求出Δ的表达式，依据k的范围，计算根的判别式Δ与0的关系，即可确定原方程根的情况.

证明：$\because a=1,b=-(2k-1),c=k^2-1,$

$$\begin{aligned}\therefore \Delta=b^2-4ac&=[-(2k-1)]^2-4\times1\times(k^2-1)\\&=4k^2-4k+1-4k^2+4\\&=-4k+5\end{aligned}$$

$\because k<0,$

$\therefore -k>0,$

$\therefore -4k+5>0$，即$\Delta>0$，

∴方程有两个不相等的实数根.

（2）关于x的一元二次方程$x^2-(k+3)x+2k+2=0$.

求证：方程总有两个实数根.

分析：先根据根的判别式求出Δ的表达式，利用平方的非负性判断Δ的符号，即可确定原方程根的情况.

证明：$\because a=1,b=-(k+3),c=2k+2,$

$$\begin{aligned}\therefore \Delta=b^2-4ac&=[-(k+3)]^2-4\times1\times(2k+2)\\&=k^2+6k+9-8k-8\\&=k^2-2k+1\end{aligned}$$

$\because k^2-2k+1=(k-1)^2\geqslant0$，即$\Delta\geqslant0$，

∴原方程总有两个实数根.

（2）根据方程根的情况判定字母系数的取值范围.

例3 （1）若关于x的一元二次方程$x^2-3x+m-2=0$有实根.

求m的取值范围.

分析：根据一元二次方程有实根，可得该方程根的判别式大于等于0，即$\Delta\geqslant0$.求解关于m的一元一次不等式确定范围即可.

解答：由题意可得：$\Delta\geqslant0$，

$\because a=1,b=-3,c=m-2,$

$\therefore \Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times1\times(m-2)=17-4m,$

$\therefore 17-4m\geqslant0$，解得$m\leqslant\dfrac{17}{4}$.

（2）已知关于x的方程$kx^2-6x+1=0$有两个不相等的实数根，求k的取值范围.

分析：根据方程有两个不相等的实数根，可知两个结论：

①该方程是一元二次方程，即$k\neq0$；

②该方程根的判别式大于0，即$\Delta>0$.

求解上述两个不等式组成的关于k的不等式组即可得到k的取值范围.

解答：原方程为一元二次方程，则$k\neq0$，

由题可得：$\Delta>0$，

$\because a=k,b=-6,c=1,$

$\therefore \Delta=b^2-4ac=(-6)^2-4\times k\times1=36-4k,$

$\therefore 36-4k>0$，解得$k<9$，

$\therefore k<9$且$k\neq0$.

复习建议

初三数学的学习内容综合性较强，学习的过程中，一定要做好归纳和总结，对知识进行系统梳理和重新建构，建立不同知识间的内在联系，对学习内容中所蕴含的思想方法进行归纳整理，从而提升学科核心素养.

以一元二次方程一章为例，在此章内容中，蕴含着丰富的数学思想方法，主要有转化思想、类比思想等.我们知道，解方程的过程就是不断地通过变形把原方程转化为与之等价的最简单方程的过程.因此，转化思想是解方程过程中思维活动的主导思想，主要表现在一元二次方程转化为一元一次方程，特殊转化为一般，一般转化为特殊.例如，通过用配方法解数字系数的一元二次方程$x^2+6x+4=0$归纳出用配方法解一般形式的一元二次方程$ax^2+bx+c=0$的方法，进而得出一元二次方程的求根公式.而用公式法又可以解各种形式的一元二次方程，推导出一元二次方程根与系数的关系.掌握转化思想并举一反三，就可以解决很多新的数学问题.在此章中，还多次运用类比的思想方法，如用配方法解一元二次方程时，可类比平方根的概念和意义.列一元二次方程解应用题，可类比列一元一次方程解应用题的思路和一般步骤.类比思想是联系新旧知识的纽带，有利于同学们开阔思路，研究解题途径和方法，有利于掌握新知识，巩固旧知识，学习时应特别重视.之前，同学们对数学思想方法的感悟可能是零散的、片段化的，但对于初三数学内容的学习与复习，一定要做好归纳总结，从全局的角度结合各知识点来系统梳理各种数学思想方法.

此外，同学们还要特别重视对于准确熟练的计算能力、严谨有序的分析推理能力、高效快速的数学阅读等基本数学能力的提升.在学习过程中，注重知识的形成过程、解题思路的探索过程和解题方法的归纳概括等.

责编/安京京 版式/马婷婷 热线/82837146 邮箱/kaoshibao@bjeea.cn