物 理

“动量守恒定律”重难点复习建议

北京市第九中学教师 李 学 钱莉莉 王聪聪

“动量守恒定律”一章是力学知识体系的核心内容，包括动量、冲量两大概念和动量定理、动量守恒定律两大定律。动量定理和动量守恒定律是高中物理力学五大定律的两个重要组成部分，也是“动量守恒定律”一章的重难点内容。纵观近十年北京高考试题，动量定理和动量守恒定律的应用是重点考查内容，如下表所示。

近十年北京高考涉及动量内容考题统计

年份	题型	题号	考查内容
2013	计算	24压轴题	动量定理：推导气体压强
2014	计算	22	动量守恒定律：完全非弹性碰撞
2015	选择	17	动量守恒定律：β衰变
2016	计算	24压轴题	动量定理：光镊效应
2017	计算	23	动量守恒定律：α衰变
2018	计算	22	冲量概念
2019	计算	24压轴题	动量定理：雨滴下落模型
2020	选择	13	动量守恒定律：牛顿摆
2021	计算	17	动量守恒定律：完全非弹性碰撞
2022	选择	10	动量守恒定律：碰撞

不难发现，北京高考试题中，动量定理侧重于考查连续体类柱状模型，考查形式多为压轴计算大题，难度较大；动量守恒定律的应用侧重于考查碰撞模型，考查形式为简单计算题或者选择题，难度较2010年和2012年高考试题有所下降（这两年压轴题均为碰撞问题）。因此，“动量守恒定律”一章的重难点就是应用动量定理解决连续体类问题和应用动量守恒定律解决碰撞问题。下面针对这两个问题，提供以下复习建议。

一、建立柱状模型，应用动量定理解决连续体类问题

1.流体类“柱状模型”问题

通常液体流、气体流等被广义地视为“流体”，质量具有连续性。通常处理方法为利用微元法建立“柱状模型”，如图1所示，沿流速的方向选取经过时间 Δt 的一小段柱形流体，其横截面积为 S，长度为 $v\Delta t$，密度为 ρ。得柱体对应的质量为 $\rho Sv\Delta t$，用动量定理研究这段微元柱状流体，建立方程。

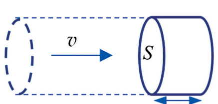

图1

例如，水力采煤用水枪在高压下喷射强力水柱冲击煤层，喷嘴出口直径 d =30mm，出口水流速度 v =54m/s，设水流不反弹，求水流对煤层的冲击力 F。

如图1所示，对小柱形流体列动量定理 $-F\Delta t=0-mv$，即 $-F\Delta t=0-\rho Sv\Delta t\cdot v$，解得 $F=\rho Sv^2$。代入数据可得结果。

2.微粒类“柱状模型”问题

通常电子流、光子流、尘埃等被广义地视为“微粒”，质量具有独立性，通常处理方法为借助单位体积内粒子数 n，建立“柱状模型”，类似图1，沿运动的方向选取一段微元，柱体的横截面积为 S，作用时间 Δt 内一段柱形流体的长度为 $v\Delta t$，对应的体积为 $Sv\Delta t$，则微元内的粒子数量 $N=nSv\Delta t$，先应用动量定理研究单个粒子，建立方程，再乘以 N 计算总量。

例如，正方体密闭容器中有大量运动粒子，每个粒子质量为 m，单位体积内粒子数量 n 为恒量。为简化问题，假定：粒子大小可以忽略；其速率均为 v，且与器壁各面碰撞的机会均等；与器壁碰撞前后瞬间，粒子速度方向都与器壁垂直，且速率不变。利用所学力学知识，导出器壁单位面积所受粒子压力 p 与 m、n 和 v 的关系。

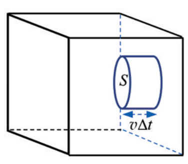

图2

如图2所示，在正方体任意一内表面，取一横截面积为 S，长度为 $v\Delta t$ 的小柱体，则小柱体内的粒子总数 $N=nSv\Delta t$，由于粒子向各个方向碰撞的概率相等，所以与面积 S 的器壁内表面碰撞的粒子数占总数的 $\frac{1}{6}$，即 $N'=\frac{1}{6}nSv\Delta t$。

一个粒子每与器壁碰撞一次，$-I_1=-mv-mv$，即给器壁的冲量 $I_1=2mv$，Δt 时间内柱体内粒子总数的 $\frac{1}{6}$ 都与面积为 S 的器壁内表面发生一次碰撞，即 $-pS\Delta t=N'(-mv-mv)$，带入 $N'=\frac{1}{6}nSv\Delta t$，解得单位面积的器壁所受的压力 $p=\frac{1}{3}nmv^2$。

二、利用对称性，简化碰撞模型

如图3所示，光滑水平面上，一运动小球与一静止小球发生碰撞，若碰撞为弹性碰撞，则遵循动量守恒定律和机械能守恒定律 $\begin{cases} m_1v_1+0=m_1v'_1+m_2v'_2 \\ \frac{1}{2}m_1v_1^2+0=\frac{1}{2}m_1v'^2_1+\frac{1}{2}m_2v'^2_2 \end{cases}$

联立解得 $\begin{cases} v'_1=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_1 \\ v'_2=\frac{2m_1}{m_1+m_2}v_1 \end{cases}$，然后分别讨论两球不同质量关系下的结论

$$\begin{cases} ①m_1>m_2时，\ v'_1>0, v'_2>0 \\ ②m_1=m_2时，\ v'_1=0,\ v'_2=v_1 \\ ③m_1<m_2时，\ v'_1<0, v'_2>0 \\ ④m_1>>m_2时，\ v'_1\approx v_1,\ v'_2\approx 2v_1 \\ ⑤m_1<<m_2时，\ v'_1\approx -v_1,\ v'_2\approx 0 \end{cases}$$

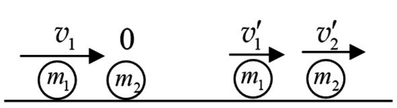

图3 弹性碰撞示意

若碰撞为完全非弹性碰撞，如图4所示，则碰撞遵循动量守恒定律，而机械能损失最多。

$$\begin{cases} m_1v_1+0=(m_1+m_2)v' \\ \frac{1}{2}m_1v_1^2+0=\frac{1}{2}(m_1+m_2)v'^2=\Delta E \end{cases}$$

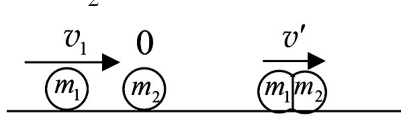

图4 完全非弹性碰撞示意

若碰撞为一般碰撞，则碰撞遵循动量守恒定律，机械能损失介于弹性碰撞和完全非弹性碰撞之间。

如上所述，一运动小球与一静止小球的弹性碰撞已经非常复杂，难以掌握，但是在实际生活中往往碰撞两者都有速度，在弹性碰撞模型中体现为两球都有速度，这时好多同学会直接套用一运动小球与一静止小球碰撞的结论，而没有意识到两球都有速度的情景与一运动小球与一静止小球的弹性碰撞是不一样的，导致无法正确解决问题。为了解决两球都有速度的弹性碰撞问题，习惯上教师会补充两球都有速度的弹性碰撞结论，如图5所示。

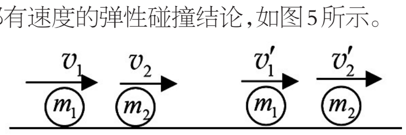

图5 弹性碰撞补充

若两球都有速度的碰撞为弹性碰撞，则遵循动量守恒定律和机械能守恒定律 $\begin{cases} m_1v_1+m_2v_2=m_1v'_1+m_2v'_2 \\ \frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2=\frac{1}{2}m_1v'^2_1+\frac{1}{2}m_2v'^2_2 \end{cases}$

联立解得 $\begin{cases} v'_1=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_1+\frac{2m_2}{m_1+m_2}v_2 \\ v'_2=\frac{2m_1}{m_1+m_2}v_1+\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}v_2 \end{cases}$

显然，两球都有速度的弹性碰撞碰后速度 v'_1、v'_2 表达式过于繁杂，两球碰前速度 v'_1、v'_2 可能同向又可能反向，导致表达式中速度的正负号表示更加复杂，如此复杂的表达式很难掌握，学生学习负担很重，学习效果很不理想。

因此建议采用弹性碰撞模型简化办法，降低学习难度，即从对称性的角度对碰撞过程进行一定的理想化处理，对碰撞过程进行图像分析，使弹性碰撞末速度的计算变得容易理解和掌握。

如图6所示，光滑水平面上速度为 v_1 的小球 m_1 与速度为 v_2 的小球 m_2 发生碰撞 $(v_1>v_2)$，m_1 挤压 m_2，m_1 减速 m_2 加速，两球接触的区域形变变大，直到两球达到相同速度 v'，接触区域形变最大。

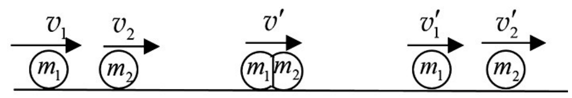

图6 理想化处理碰撞

若接触区域发生的是弹性形变，将两球相互作用力与此处形变视作一般线性关系，此时接触区域形变最大，具有最大的弹力，接下来 m_1 继续减速 m_2 继续加速，m_1 的速度开始小于 m_2 的速度，两者逐渐分开，当两小球形变完全恢复时，两者脱离，碰撞结束，弹性形变储存的弹性势能完全转化为动能，碰撞为弹性碰撞。因为将两球相互作用力与此处形变视作一般线性关系，所以形变形成过程（压缩过程）与形变恢复过程（反弹过程）呈对称关系，相互挤压的弹力大小变化呈对称关系，作用时间相等，即 $\bar{F}_{压缩}=\bar{F}_{反弹}$，$t_{压缩}=t_{反弹}$，所以 $\bar{F}_{压缩}t_{压缩}=\bar{F}_{反弹}t_{反弹}$，

对 m_1 有 $\begin{cases} -\bar{F}_{压缩}t_{压缩}=m_1v'-m_1v_1 \\ -\bar{F}_{反弹}t_{反弹}=m_1v'_1=m_1v' \end{cases}$，

得 $m_1v'-m_1v_1=m_1v'_1-m_1v'$，即 $v_1-v'=v'-v'_1$；

对 m_2 有 $\begin{cases} \bar{F}_{压缩}t_{压缩}=m_2v'-m_2v_2 \\ \bar{F}_{反弹}t_{反弹}=m_2v'_2-m_2v' \end{cases}$，

得 $m_2v'-m_2v_2=m_2v'_2-m_2v'$，即 $v'_2-v'=v'-v_2$；

也就是说在两球的压缩与反弹两个过程中，任意一球的速度变化量大小是一样的，设形变恢复过程或者形变形成过程 m_1 的速度变化量为 Δv_1，m_2 的速度变化量为 Δv_2（如图7所示），则 $\begin{cases} \Delta v_1=v'-v_1=v'_1-v' \\ \Delta v_2=v'_2-v'=v'-v_2 \end{cases}$

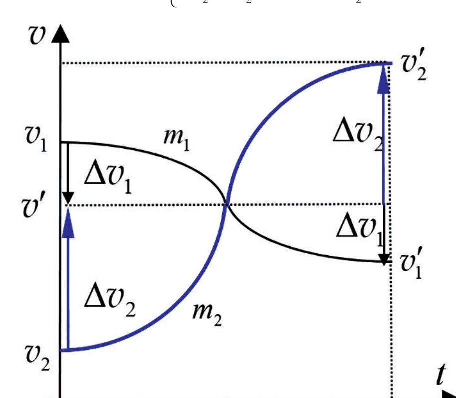

图7 理想化弹性碰撞图像

可以得到弹性碰撞的末速度表达式为

$$\begin{cases} v'_1=v_1+2\Delta v_1=2v'-v_1 \\ v'_2=v_2+2\Delta v_2=2v'-v_2 \end{cases}$$

因此弹性碰撞的末速度的关键是解出共同速度 v'，由动量守恒定律 $m_1v_1+m_2v_2=(m_1+m_2)v'$，轻松解得 $v'=\frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}$，弹性碰撞的末速度表达式为

$\begin{cases} v'_1=2\left(\frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}\right)-v_1 \\ v'_2=2\left(\frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}\right)-v_2 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} v'_1=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_1+\frac{2m_2}{m_1+m_2}v_2 \\ v'_2=\frac{2m_1}{m_1+m_2}v_1+\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}v_2 \end{cases}$，此结果与前面联立动量守恒定律和机械能守恒定律所得结果一致，解题难度大大降低。

除以上两个重难点之外，“动量守恒定律”一章还包括验证动量守恒定律实验、反冲模型、子弹打木块模型等，其中，验证动量守恒定律实验在2012年北京高考出现一次；α衰变和β衰变作为反冲模型出现多次；子弹打木块模型在强调真实情境的命题要求下几乎已经消失。考生在备考时，既要注重知识体系完整性，更要突出重视重难点的突破，做到轻重有度、有的放矢。