数学

几何综合题多解分析

黄冈中学北京朝阳学校 刘红文 张明霞

初三学生遇到几何综合题，经常会觉得很困难，主要原因是对几何图形的结构及问题本身理解不透彻。本文通过对一道几何综合题多解分析，引导学生如何在复杂的图形中分析图形、寻找关系、解决问题。

一、例题呈现

如图1，四边形 $ABCD$ 是矩形($AB<AD$)，$\angle DAB$ 的平分线交 BC 于点 E，交 DC 延长线于点 F.

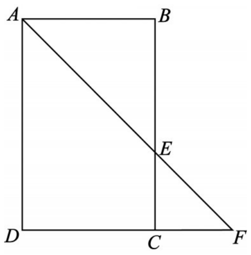

图1

(1)求证：$BC=DF$；

(2) G 是 EF 的中点，连接 DG，依题意补全图形，用等式表示线段 DA，DC，DG 之间的数量关系，并证明.

本题是矩形背景下的几何综合题，需要综合运用等腰直角三角形、勾股定理、矩形等相关的知识去解决问题，考查学生的几何直观、逻辑推理等数学核心素养.

第(1)问入手较为容易，运用矩形对边平行和角的平分线性质，很容易得出答案.（证明略）

第(2)问增加新的条件，补全图形较容易，但写出线段 DA，DC，DG 之间的数量关系，对于学生来说比较困难. 这个结论，需要根据图形的结构特征，并利用第(1)问中得到的结论综合分析. 下面对几种解法逐一进行分析.

二、解法探究

1. 构造全等(相似)三角形

方法1. 在第(1)问中，已经得到了 $BC=DF$，增加 G 是 EF 的中点条件，补全图形，可以发现 DF 是 $\triangle DFG$ 的一条边，所以连接 BG 和 CG，就能得到 $\triangle BCG$，证明 $\triangle BCG$ 与 $\triangle DFG$ 全等，再连接 BD，证明 $\triangle BDG$ 是等腰直角三角形，结合勾股定理，就可以得到要证明的三条线段之间的数量关系了. 以下为证明过程(如图2).

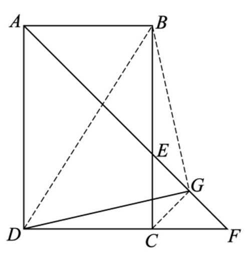

图2

证明：连接 BG，CG，BD.

在 $Rt\triangle ECF$ 中，G 是 EF 的中点，$\therefore CG=EG=FG$.

$\because \angle ADF=90°$，$\therefore \angle F=45°$.

$\therefore \angle CGF=90°$，$\angle BCG=\angle F=45°$.

$\therefore \triangle BCG\cong\triangle DFG$. $\therefore BG=DG$，$\angle BGC=\angle DGF$.

$\therefore \angle BGD=\angle CGF=90°$. $\therefore BD=\sqrt{2}DG$.

$\because BD^2=BC^2+DC^2=DA^2+DC^2$，$\therefore DA^2+DC^2=2DG^2$.

此思路充分利用第(1)问中的结论和得到的 $\angle F=45°$，构造出全等三角形和等腰直角三角形，利用勾股定理和等腰直角三角形三边之间的关系，把要证明的三条线段建立起联系，达到解决问题的目的.(学生在学完“相似”后，也可用“相似”解决问题.)

方法2. 根据 $AD=DF$，构造全等三角形(如图3)，过 D 作 $YD\perp DG$，并截取 $YD=DG$，连接 AY，YG，CG，YC，证明四边形 $AYCG$ 为矩形，再利用矩形的性质进行证明.（过程略）

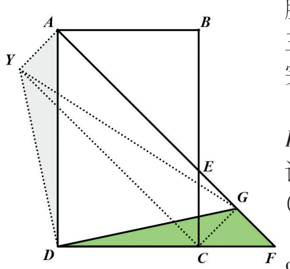

图3

此方法是以 D 为旋转中心，将 $\triangle DFG$ 逆时针旋转 $90°$ 得到 $\triangle DAY$，形成等腰直角 $\triangle DYG$ 以及矩形 $AYCG$，借助矩形对角线相等及勾股定理得到结论.

2. 构造等腰直角三角形

如果我们没有想到利用第(1)问的结论，只要再作辅助线，构造出新的等腰直角三角形，用等腰直角三角形边的关系、勾股定理及图形中线段的和差关系，通过逻辑推理得出结论，虽然复杂一点，但也能达到解决问题的目的.

方法3. 过 D 作 $DM\perp AF$ 于点 M，连接 DG(如图4)，

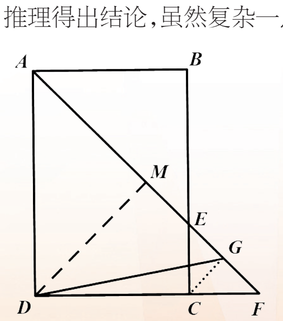

图4

$\because \triangle DMG$ 为直角三角形，$\therefore DG^2=MG^2+DM^2$

$\because$ 在 $Rt\triangle DAM$ 中，$\angle DAM=45°$，$\angle AMD=90°$

$\therefore DM^2=(\frac{\sqrt{2}}{2}AD)^2$，又 $MG=MF-GF$，

$\therefore DG^2=(MF-GF)^2+(\frac{\sqrt{2}}{2}AD)^2$.

$\because \angle DAF=\angle BAF=\frac{1}{2}\angle DAB=45°$，由(1)证明易得 $\triangle CEF$，$\triangle DMF$，$\triangle CGF$ 均为等腰直角三角形，

$\therefore MF=\frac{\sqrt{2}}{2}AD=\frac{\sqrt{2}}{2}DF$，$GF=\frac{\sqrt{2}}{2}CF$

$\therefore DG^2=\frac{1}{2}AD^2+(\frac{\sqrt{2}}{2}AD-\frac{\sqrt{2}}{2}CF)^2=\frac{1}{2}AD^2+\frac{1}{2}(AD-CF)^2$，

由(1)得 $DF=BC=AD$ $\therefore DG^2=\frac{1}{2}AD^2+\frac{1}{2}CD^2$，即 $DA^2+DC^2=2DG^2$.

方法4. 过 G 作 $GO\perp DF$ 于点 O(如图5)，

$\because \angle DAF=\angle BAF=\frac{1}{2}\angle DAB=45°$，由(1)证明及已知，易得 $\triangle CEF$，$\triangle GOF$，$\triangle CGF$ 均为等腰直角三角形(以下同上，略.)

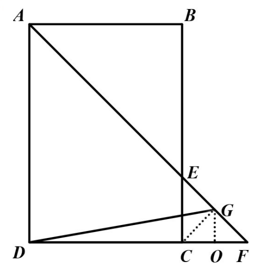

图5

以上几种解法，均是利用了 $\angle F=45°$ 这一图形特征，作辅助线构造特殊的四边形及等腰直角三角形，再分析线段之间的关系进行证明.

3. 构造平行四边形

除以上方法外，还可以利用 G 是 EF 的中点，延长 DG，构造出平行四边形，再利用平行四边形的性质和等腰直角三角形边之间的关系以及勾股定理进行证明.

方法5. 延长 DG，使 $GQ=DG$，连接 DE，EQ，QF，延长 DF，作 $QM\perp DF$ 的延长线于 M(如图6)，

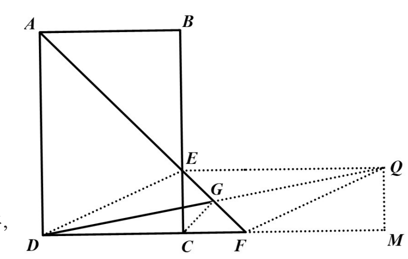

图6

可得四边形 $DEQF$ 为平行四边形.

由(1)可知 $DF=BC=AD$

$\therefore EQ=DF=BC=AD$

$\therefore \angle ECF=\angle CEQ=90°$

$\therefore \angle QEC=\angle ECF=\angle QMD=90°$，

$\therefore$ 四边形 $EQMC$ 为矩形，

由已知易证 $\triangle ABE$ 为等腰直角三角形，

$\therefore AB=BE=CD$，

$\therefore EC=BC-BE=AD-CD$，

由矩形 $EQMC$ 得 $QM=EC=AD-CD$.

在 $Rt\triangle DMQ$ 中 $DM^2+QM^2=DQ^2$，$\therefore (AD+CD)^2+(AD-CD)^2=(2DG)^2$，

即 $DA^2+DC^2=2DG^2$

方法6. 延长 DG 至点 T，使得 $GT=DG$，连接 FT，DE，ET，BT 和 BD(如图7).

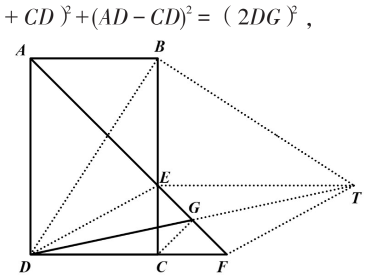

图7

此法与方法5类似通过构造证明 $DFTE$ 是平行四边形，利用已知及矩形 $ABCD$ 的性质，证明 $\triangle ABD\cong\triangle BET$，得到等腰 $Rt\triangle BDT$，进而有 $DT^2=2BD^2$，$4DG^2=2(DA^2+DC^2)$ 即 $DA^2+DC^2=2DG^2$.

4. 解析法

把矩形 $ABCD$ 放在平面直角坐标系中，用字母表示出 AB 和 AD 的长，再表示出相应的点的坐标，求出DG的长度，从而解决问题.

方法7. 以 D 为坐标原点，DC 和 DA 分别为 x 轴和 y 轴的正半轴，建立平面直角坐标系(如图8)，

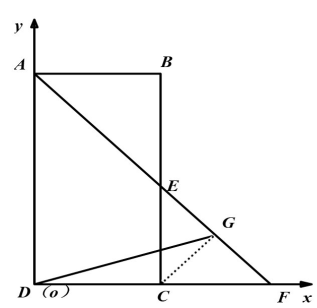

图8

设 $AB=a$，$AD=b$，由已知可得 $AD=DF$，则 $D(0,0)$，$A(0,b)$，$B(a,b)$，$C(a,0)$，$F(b,0)$，则 $CF=b-a$，由 $CE=CF$，得 $E(a,b-a)$，

因为 G 是 EF 的中点，所以 $G(\frac{a+b}{2},\frac{b-a}{2})$，

由两点之间的坐标公式，

则 $DG=\sqrt{(\frac{a+b}{2})^2+(\frac{b-a}{2})^2}$，

化简得到 $DG^2=\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2=\frac{1}{2}DA^2+\frac{1}{2}DC^2$，

即 $DA^2+DC^2=2DG^2$.

本题中用到了线段中点坐标公式以及平面直角坐标系中的两点之间的距离公式等拓展知识，但方法更简洁. 在初中阶段用解析法来解决几何问题，这种想法可以拓宽学生的视野，培养学生的创新意识，能激发学有余力学生的探索兴趣.

三、解题总结

这道几何综合题，我们从四种不同的角度去探究解法，方法有繁有简。纵观几何综合题，要找到它的突破点，关键还是要善于利用题中的结论，依据图形的结构特征，抓住问题的本质，灵活运用三角形、四边形等相关的知识，把复杂的数学问题变得简明、形象。要提升解决几何综合题的能力，不仅仅是要多角度去思考问题，一题多解，更重要的是要学会多解归一，勇于探索，提升几何直观素养和逻辑推理能力。

责编/安京京 版式/高 薪 热线/82837146 邮箱/kaoshibao@bjeea.cn