数学

立体几何动点问题典型案例解析

北京大学附属中学教师 单治超

立体几何是高中数学的重要内容．近些年北京市各区模拟题中，立体几何动点问题经常出现，且多处于选择题最后一题或填空题最后一题的位置．其综合性较强，难度较大，对考生的综合数学素养要求较高．

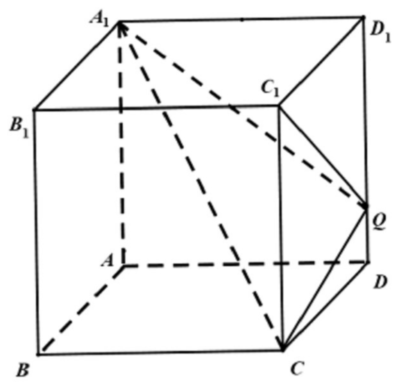
动点问题相对于非动点问题有以下特点：

1. 动点问题虽然也会给出图形，但图形中的动点是静止的，因此图形常常不具有代表性；
2. 动点问题中有不确定性，因此需要判断真假的命题常常是全称命题或存在性命题，特别是对于存在性命题，根据图形不容易直观地做出判断；
3. 如果采用建系方法，需要引入变量刻画动点的位置；
4. 点动成线、线动成面的观点需要经常使用；
5. 轨迹的观点有时需要使用．

某些重要的数学思想、方法在解决立体几何动点问题中频繁用到：转化，构造，特殊化，函数与方程．

下面选取典型案例进行深入解析：

【例】（2023年东城期末第10题）



如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，Q 是棱 DD_1 上的动点，下列说法中正确的是

①存在点 Q，使得 $C_1Q \parallel A_1C$；

②存在点 Q，使得 $C_1Q \perp A_1C$；

③对于任意点 Q，Q 到 A_1C 的距离为定值；

④对于任意点 Q，$\triangle A_1CQ$ 都不是锐角三角形．

(A)①③　(B)②③　(C)②④　(D)①④

本题选取正方体为背景，建立空间直角坐标系非常方便，而且四条结论都很容易转化为向量来刻画．因此，向量法不失为一种好的选择：以 A 为原点，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AA_1}$ 方向分别为x轴、y轴、z轴正方向建立空间直角坐标系．可设 $Q(0,1,a)$ $(0\leqslant a\leqslant 1)$．由于 $\overrightarrow{C_1Q}=(-1,0,a-1)$，$\overrightarrow{A_1C}=(1,1,-1)$．利用空间向量平行和垂直的条件，①错，②对．

③的判断：从表面上看，③是一个定量的问题，但是它可以转化为定性的问题．对于任意点 Q，Q 到 A_1C 的距离为定值，这等价于 $A_1C \parallel DD_1$．显然这是不对的，因此③错误．

④的判断：从表面上看，④是个定性的问题，但是解决它却需要转化为定量的问题．易见 $\triangle A_1CQ$ 中，边 A_1C 最长．于是 $\triangle A_1CQ$ 是否是锐角三角形，取决于 $\angle A_1QC$ 是否是锐角．经计算 $\overrightarrow{QA_1}\cdot\overrightarrow{QC}=a(a-1)\leq 0$，所以 $\angle A_1QC$ 不是锐角，④正确．

简要回顾：因为采用了建系方法，所以需要引入变量刻画动点的位置．每个命题的判断都用到了转化，第④问的判断用到了函数思想．

下面寻求不建系的解法．

先看①：①是关于平行线的存在性．本题中直线 A_1C 与平面 CDD_1C_1 相交，利用线面平行判定定理和反证法，平面 CDD_1C_1 内不可能存在直线与 A_1C 平行．而 $C_1Q\subset$平面CDD_1C_1，因此①错误．

这一做法体现了线动成面的观点：动直线 C_1Q 是在平面 CDD_1C_1 内运动的．然后通过讨论直线 A_1C 与平面 CDD_1C_1 的位置关系，来讨论 A_1C 与 C_1Q 的位置关系．

也可以利用异面直线判定定理判断：$C_1Q\subset$平面CDD_1C_1，$A_1C\cap CDD_1C_1=C$，$C\notin C_1Q$，所以 C_1Q 与 A_1C 异面．因此①错误．事实上，上一段只不过是把异面直线判定定理证了一遍．但考生有可能忽略这部分内容，因此可能不大熟悉．

再看②：②是关于垂线的存在性．Q 是棱 DD_1 上的动点，直线 C_1Q 是平面 CDD_1C_1 内的动直线．利用三垂线定理及其逆定理，$C_1Q\perp A_1C$ 当且仅当 $C_1Q\perp CD_1$．实现这个等价转化之后，容易发现这样的动点 Q 是存在的：它与 D_1 重合．因此②正确．

高中立体几何在引入向量法之后，由于二面角不再用几何法找出，三垂线定理及其逆定理的地位大大下降．考生要领会的是三垂线定理及其逆定理的实质：把空间中的垂直问题等价转化为平面内的垂直问题．特别是在动点问题中，把定直线与空间中某条动直线的垂直问题，转化为定直线与平面内某条动直线的垂直问题，之后比较容易判断．事实上这里用到的是降维转化思想，后面还会用到．

最后看不建系如何解决④：

$\overrightarrow{QA_1}\cdot\overrightarrow{QC}=\overrightarrow{QA_1}\cdot(\overrightarrow{QD}+\overrightarrow{DC})=\overrightarrow{QA_1}\cdot\overrightarrow{QD}$，当 Q 不与 A_1 或 D 重合时，$\angle A_1QD$ 是钝角，$\overrightarrow{QA_1}\cdot\overrightarrow{QD}<0$；当 Q 与 A_1 或 D 重合时，$\overrightarrow{QA_1}\cdot\overrightarrow{QD}=0$．所以 $\overrightarrow{QA_1}\cdot\overrightarrow{QC}\leqslant 0$，$\angle A_1QC$ 不是锐角．这里也用到了降维转化：利用数量积的分配律，把空间向量的数量积转化为平面向量的数量积．

还有一种做法：设 A_1C 的中点，也就是正方体的中心为 O．易见 $|OQ|\leqslant\frac{1}{2}|A_1C|$，所以 $\angle A_1QC$ 是钝角或直角．

考生在考场上以得分为目标，以快速得分为最高目标，所以作为选择题，考生可从选项入手，利用简单的互斥逻辑可以看出，本题①和②只需判断出一个即可，③和④只需判断出一个即可．考生既要掌握这种应试技巧，又要不满足于选出正确答案就浅尝辄止，不再深入挖掘，否则会得不偿失．

责编/胡梦蝶　版式/高 薪　热线/82837146　邮箱/kaoshibao@bjeea.cn