

数学

# 如何做好函数知识梳理与运用

黄冈中学北京朝阳学校教师 刘红文

初三第二学期学习的第26章反比例函数是比较“独特”的函数，它是一个不连续的函数，对应图象有两支；图象具有中心对称性、轴对称性；反比例函数表达式中 $k$ 的几何意义涉及面积问题。下面以第26章反比例函数为例，详解如何做好函数知识梳理与运用。

## 一、梳理初中数学知识体系，做到心中有“数”

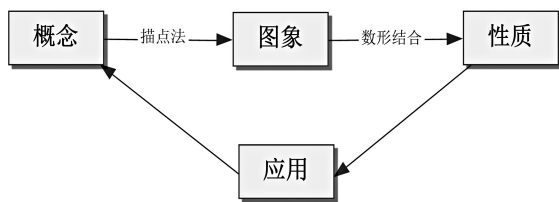
第26章以平面直角坐标系为学习基础，在函数及其图象的初步知识、一次函数及二次函数的有关知识基础上进行研究，与研究一次函数、二次函数类似，考生要在反比例函数定义的基础上，研究反比例函数的图象和性质，并应用反比例函数解决一些实际问题。这是数与代数领域中的三大主题，即：数与式、方程与不等式、函数中的重要部分，三个主题按照知识系统扩展安排，从数与式到方程与不等式再到函数，形成了一个连贯的体系，考生要掌握系统化数学知识与技能。

### (一)函数的知识层面

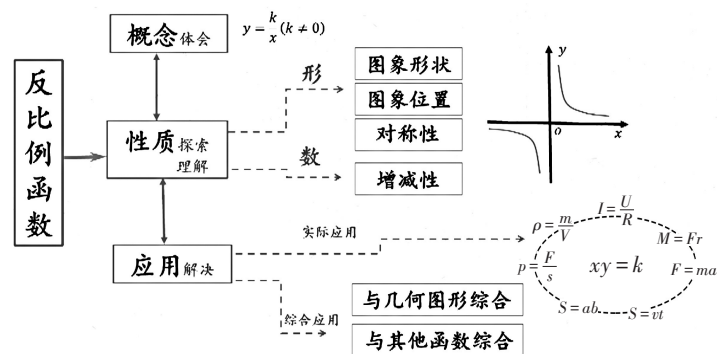
函数研究对象	共性学习内容
一次函数 二次函数 反比例函数	1. 函数的概念； 2. 函数的三种表示方法； 3. 描点法画函数的图象； 4. 求函数的值； 5. 用适当的函数表示法描述简单实际问题中变量之间的关系，并确定函数自变量的取值范围； 6. 结合函数图象对简单实际问题中的函数关系进行分析； 7. 用函数的有关知识解决简单的实际问题； 8. 用函数的有关内容，探索有关问题中的数量关系和变化规律，并结合对函数关系的分析，对变量之间的对应关系和变化情况进行初步探究。

### (二)学习过程层面

函数的本质特征是变化 and 对应，这是学习的主线。



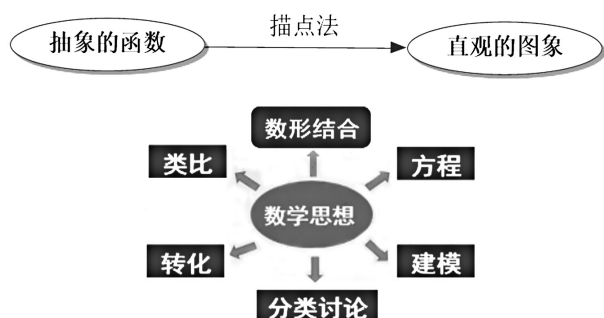
研究函数的一般过程



反比例函数基本学习过程

### (三)数学思想方法层面

在学习“函数”的过程中，支撑研究函数知识体系的桥梁为“描点法”。



研究函数及其性质的基本工具

## 二、通过典型例题分析，做到手中有“术”

【例1】下面的三个问题中都有两个变量：

①汽车从A地匀速行驶到B地，汽车的剩余路程 $y$ 与行驶时间 $x$ ；

②将水箱中的水匀速放出，直至放完，水箱中的剩余水量 $y$ 与放水时间 $x$ ；

③用长度一定的绳子围成一个矩形，矩形的面积 $y$ 与一边长 $x$ ，其中，变量 $y$ 与变量 $x$ 之间的函数关系可以利用如图所示的图象表示的是

- A. ①②    B. ①③  
C. ②③    D. ①②③

【分析】

①由汽车的剩余路程 $y$ 随行驶时间 $x$ 的增加而减小判断正确；

②由水箱中的剩余水量 $y$ 随放水时间 $x$ 的增大而减小判断正确；

③由矩形的面积公式判断正确。

本题考查了利用函数图象解决实际问题，正确理解函数图象表示的意义，理解问题的过程，就能通过图象得到函数问题的相应解决。

【例2】如图，一次函数 $y=kx+b$ 与反比例函数 $y=\frac{m}{x}$ 的图象交于点 $A(2, 1)$ 、 $B(-1, -2)$ ，

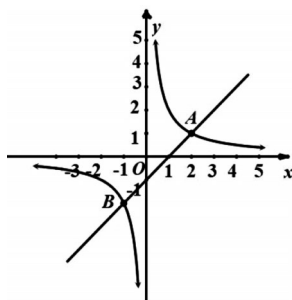
(1)一次函数的值大于反比例函数的值时， $x$ 的取值范围是\_\_\_\_\_；

(2)写出不等式的 $kx+b > \frac{m}{x}$ 解集；

(3)过动点 $P(x, 0)$ 且垂直于 $x$ 轴的直线与一次函数和反比例函数分别交于点 $C, D$ ，当点 $C$ 位于点 $D$ 上方时，写出 $x$ 的取值范围。

【分析】

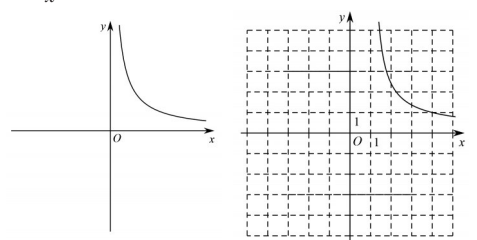
仔细分析，就会发现本题的问题是：一次函数与反比例函数的交点问题，三问其实是同一个问题，问的角度不一样，第(1)问是数形结合看图，第(2)问是用函数的观点看不等式，第(3)问用图形变化角度看函数图象，都可得出答案： $-1 < x < 0, x > 2$ 。



【例3】在研究反比例函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图象与性质

时，我们对函数解析式进行了深入分析。

首先，确定自变量 $x$ 的取值范围是全体非零实数，因此函数图象会被 $y$ 轴分成两部分；其次，分析解析式，得到 $y$ 随 $x$ 的变化趋势：当 $x > 0$ 时，随着 $x$ 值的增大， $\frac{1}{x}$ 的值减小，且逐渐接近于零，随着 $x$ 值的减小， $\frac{1}{x}$ 的值会越来越大，由此，可以大致画出 $y=\frac{1}{x}$ 在 $x > 0$ 时的部分图象，如左图所示：



利用同样的方法，可以研究函数 $y=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ 的图象与性质。通过分析解析式画出部分函数图象如右图所示。

(1)请沿此思路在右图中完善函数图象的草图，并标出此函数图象上横坐标为0的点 $A$ ；(画出网格区域内的部分即可)

(2)观察图象，写出该函数的一条性质：\_\_\_\_\_；

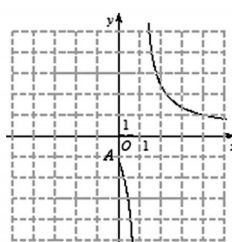
(3)若关于 $x$ 的方程 $\frac{1}{\sqrt{x-1}}=a(x-1)$ 有两个不相等的实数根，结合图象，直接写出实数 $a$ 的取值范围：\_\_\_\_\_。

【分析】(1)提炼画函数图象的步骤：关注自变量的取值范围及 $y$ 随 $x$ 的变化趋势；(2)类比一次函数、二次函数、反比例函数图象性质从增减性、最值和图象特征三个不同的角度写性质；(3)从“形”的角度理解方程 $\frac{1}{\sqrt{x-1}}=a(x-1)$ 有两个不相等的实数根的含义，通过分类讨论、确定临界情况，最终利用“数形结合”，求出字母取值范围。

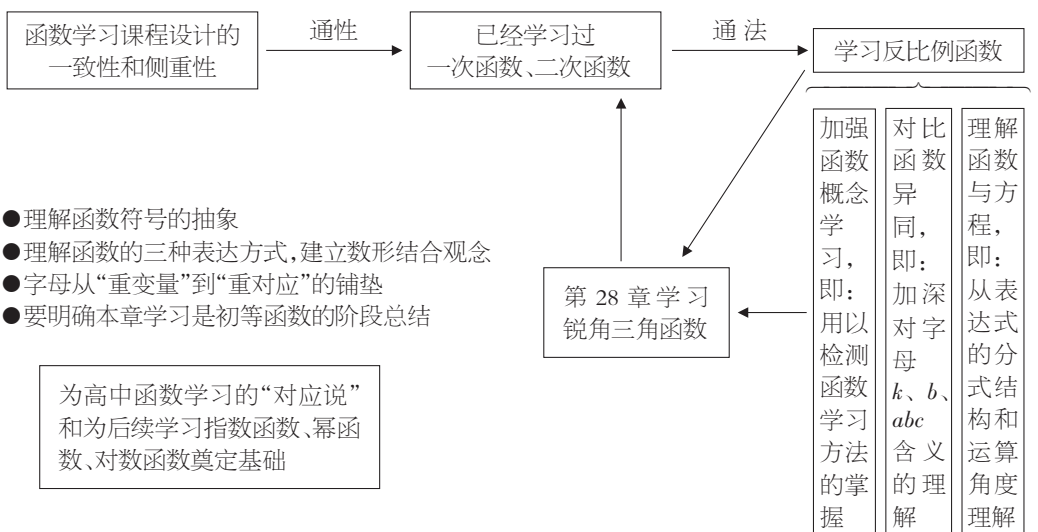
【答案】(1)如图：

(2)当 $x > 1$ 时， $y$ 随着 $x$ 的增大而减小(答案不唯一)；

(3) $a \geq 1$ 。



## 三、提升对抽象概念学习的能力，为日后做好准备



- 理解函数符号的抽象
- 理解函数的三种表达方式，建立数形结合观念
- 字母从“重变量”到“重对应”的铺垫
- 要明确本章学习是初等函数的阶段总结

为高中函数学习的“对应说”和为后续学习指数函数、幂函数、对数函数奠定基础

加强函数概念学习，即：用以检测函数学习方法的掌握

对比函数异同，即：加深对字母 $k, b, abc$ 含义的理解

理解函数与方程，即：从表达式的分式结构和运算角度理解