数学

发展图形变化视角 解决几何综合问题

——利用角平分线构造轴对称图形专题复习

北京师范大学三帆中学朝阳学校教师 刘 琦

图形的变化是研究图形的基本方法，在分析学考几何综合问题时，从图形变化出发，发现和构造不变量和不变关系，是解决问题的重要途径．考生在解决几何综合问题时，面对复杂的图形结构和已知条件，往往会觉得无从下手，本文先简单梳理初中阶段图形变化的关系，再通过基本图形构造和例题讲解，引领考生发展图形变化视角．

初中阶段学习的几何图形的变化主要包括图形的轴对称、图形的平移、图形的旋转、图形的相似和图形的投影，其中轴对称、平移和旋转是图形的全等变换，全等作为初中阶段图形之间的重要关系，在解决几何综合问题中发挥重要作用．在三种变化中，平移变化和旋转变化都可以由轴对称变化来完成，轴对称不仅是一种几何变换，更是一种工具，一种观察图形的视角．

我们从角这个简单的轴对称图形入手，在图形变化的视角下进行知识的归纳梳理，依据角的对称性，结合角平分线的性质，构造多种轴对称图形，用轴对称的角度观察图形的结构特征，为后续进一步运用图形变化视角认识几何图形，运用图形变化思想解决综合性问题奠定基础．

一、基本图形

角本身是轴对称图形，角平分线所在的直线是它的对称轴，依据角的对称性，可以构造多种轴对称图形．

1. 如图1，P是$\angle MON$的角平分线上一点，过点P作$PA\perp OM$，交OM于点A，根据对称性，构造轴对称图形，过点P作$PB\perp ON$，交ON于点B，则$PB=PA$，$\mathrm{Rt}\triangle AOP\cong\mathrm{Rt}\triangle BOP$.

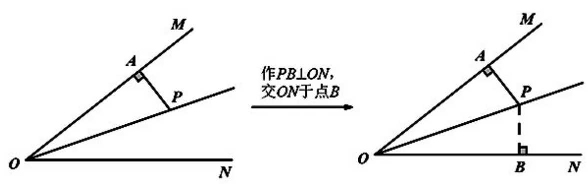


图1

2. 如图2，P是$\angle MON$的角平分线上一点，$AP\perp OP$于点P，根据对称性，构造轴对称图形，延长AP交ON于点B，则$\triangle AOB$是等腰三角形，P是底边AB的中点，OP为$\triangle AOB$底边AB的高线、中线，$\mathrm{Rt}\triangle AOP\cong\mathrm{Rt}\triangle BOP$.

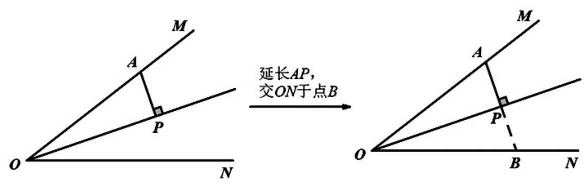


图2

3. 如图3，P是$\angle MON$的角平分线上一点，点A是射线OM上任意一点，根据对称性，构造轴对称图形，在ON上截取$OB=OA$，连接PB，则$\triangle OPB\cong\triangle OPA$.

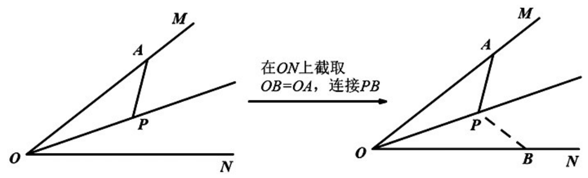


图3

二、应用举例

【例1】如图4，$\angle B=\angle C=90°$，E是BC的中点，DE平分$\angle ADC$.

求证：AE是$\angle DAB$的平分线．

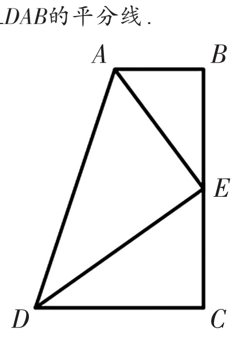
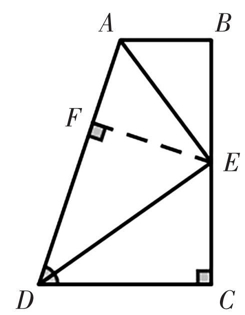


图4

【分析】DE平分$\angle ADC$，根据对称性，构造轴对称图形，作$EF\perp AD$于F，由角平分线的性质定理可得$EF=EC$，由于$BE=EC$，$EF=EB$，可得AE是$\angle DAB$的平分线．

【解答】作$EF\perp AD$于F，



$\because\angle B=\angle C=90°$，

$\therefore CB\perp AB$，$CB\perp CD$.

$\because$ DE平分$\angle ADC$，

又$\because EF\perp AD$，$EC\perp CD$.

$\therefore CE=EF$.

$\because E$是BC的中点，

$\therefore CE=BE$.

$\therefore BE=EF$.

又$\because EB\perp AB$，$EF\perp AD$，

$\therefore AE$是$\angle DAB$的平分线．

【例2】已知：如图5，等腰三角形ABC中，$\angle A=90°$，$\angle ABC$的平分线交AC于点D，过点C作BD的垂线交BD的延长线于点E. 求证：$BD=2CE$.

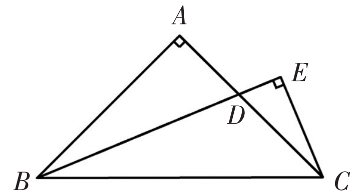
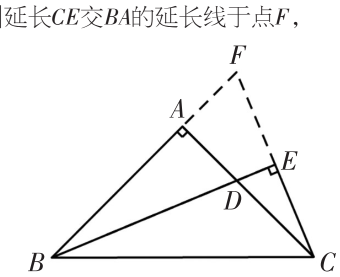


图5

【分析】BE是$\angle ABC$的平分线，BE所在直线是$\angle ABC$的对称轴，根据对称性，构造轴对称图形解决问题．

【解答】延长CE交BA的延长线于点F，



$\because BE$平分$\angle ABC$，$BE\perp CF$，

$\therefore\angle BCE=\angle F$.

$\therefore\triangle BCF$为等腰三角形．

$\therefore CE=EF$，$CF=2CE$.

$\because\angle BAD=\angle CEB=90°$，$\angle BDA=\angle CDE$，

$\therefore\angle ABD=\angle ACF$.

$\because AB=AC$，$\angle ABD=\angle ACF$，$\angle BAD=\angle CAF=90°$，

$\therefore\triangle ABD\cong\triangle ACF$.

$\therefore BD=CF=2CE$.

【例3】（2015年北京中考28题）如图6，正方形$ABCD$中，BD是一条对角线，点P在射线CD上（与点C、D不重合），连接AP，平移$\triangle ADP$，使点D移动到点C，得到$\triangle BCQ$，过点Q作$QH\perp BD$于H，连接AH，PH.

求证：$AH=PH$，$AH\perp PH$.

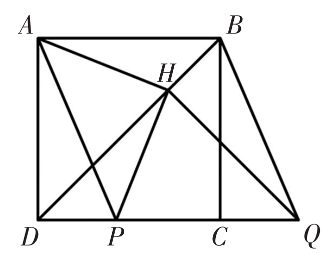
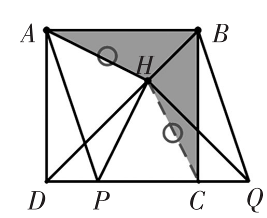


图6

【分析】$\triangle BCQ$是由$\triangle ADP$平移得到的，可根据平移的性质探索研究问题的思路．从轴对称的视角看，正方形是轴对称图形，对角线BD所在直线是它的对称轴，根据对称性，连接CH，构造轴对称图形，即可将线段AH转移到CH，同时将$\angle AHD$转移到$\angle CHD$，等腰直角三角形DHQ是轴对称图形，对称轴为$\angle DHQ$的角平分线所在直线，可以转移线段CH到PH，转移$\angle DHP$到$\angle QHC$，根据等量代换可得$AH=PH$，由$\angle DHP=\angle QHC$，可得$\angle AHD+\angle DHP=\angle CHD+\angle QHC=90°$.

【解答】连接CH，



$\because$正方形$ABCD$关于直线BD对称，

$\therefore AH=CH$，$\angle AHD=\angle CHD$，$\angle BDC=45°$.

$\because QH\perp BD$，

$\therefore\triangle DHQ$为等腰直角三角形，

$\therefore QH=DH$，$\angle HDQ=\angle HQD=45°$.

$\because$平移$\triangle ADP$得到$\triangle BCQ$，

$\therefore DP=CQ$，

$\therefore\triangle HDP\cong\triangle HQC$（SAS）.

$\therefore CH=PH$，$\angle DHP=\angle QHC$.

$\therefore AH=PH$.

$\because\angle CHD+\angle QHC=90°$，

$\therefore\angle AHD+\angle DHP=90°$，

$\therefore AH\perp PH$.

通过图形变化的视角理解轴对称、旋转和平移的基本性质，可以抽象出图形运动变化过程中的不变量和不变关系，从而为运用图形变化方法研究图形性质奠定基础，使其成为研究图形的桥梁．

责编/胡梦蝶 版式/马婷婷 热线/82837146 邮箱/kaoshibao@bjeea.cn