数学

备考难点:圆锥曲线运算优化

北京市第四中学教师　唐绍友

本学期,高考进入冲刺备考阶段。在数学学科复习中,圆锥曲线综合问题往往是考生遇到的难点,因此,大家要在解决圆锥问题中体验"灵活选择,优化运算"的思考策略,逐步形成运算技能,有效培养运算素养。

一、根据目标所需,选择直线方程的形式

直线方程有多种形式,在涉及圆锥曲线问题的计算过程中,直线方程的两点式、截距式、一般式很少用到。因为在与圆锥曲线方程联立中,运算比较复杂,而直线方程的斜截式$y=kx+b$(纵截式)、$x=my+a$(横截式)在计算中显得比较简单。根据问题的目标,考生要对这两个形式做灵活选择:如果目标需要y的一元二次方程,选用横截式为宜;如果目标需要x的一元二次方程,选用纵截式为宜。针对这两种形式,考生除了根据目标做选择外,还要注意这两种形式各自的缺陷。纵截式中缺少垂直于x轴的直线,横截式缺少了平行于x轴的直线。此外,考生要注意点斜式的应用,在点斜式$y-y_0=k(x-x_0)$中,如果x_0与y_0都不为0时,选择点斜式参与联立计算,消元后一元二次方程比较复杂,所以此时可以回避点斜式,选择截距式为宜,到最后再把点的坐标代入直线方程找到k与b、m与a的关系,再求解目标,这样可以优化运算。

例1:*已知抛物线$C:y^2=4x$,点$M(m,0)$在x轴的正半轴上,过M的直线l与C相交于A、B两点,O为坐标原点.(Ⅰ)当$m=1$,直线l的斜率是1时,求以AB为直径的圆方程;(Ⅱ)若存在直线l使得$|AM|$,$|OM|$,$|MB|$成等比数列,求实数m的取值范围.*

(Ⅰ)$(x-3)^2+(y-2)^2=16$;

(Ⅱ)**解题思路**:有下列公式供选择:

(1)$m^2=\sqrt{(x_1-m)^2+y_1^2}\cdot\sqrt{(x_2-m)^2+y_2^2}$;

(2)$m^2=\sqrt{1+k^2}\cdot|x_1-m|\cdot\sqrt{1+k^2}|x_2-m|=(1+k^2)|x_1-m||x_2-m|$

$=(1+k^2)|x_1x_2-m(x_1+x_2)+m^2|$;

(3)$m^2=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+m)^2-4x_1m}\cdot\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_2+m)^2-4x_2m}$;

(4)$m^2=\sqrt{1+(\frac{1}{k})^2}\cdot|y_1-0|\cdot\sqrt{1+(\frac{1}{k})^2}|y_2-0|=[1+(\frac{1}{k})^2]|y_1y_2|$

考生要全面分析后再做出选择,如果选(1)就得消元化简,将直线方程代入化简,变出(2)式;选(2),可用横坐标的韦达定理,出现x_1x_2,x_1+x_2;选(3),不便计算mx_1,x_1+m,所以不便计算距离;选(4),形式最简单,运算量最小。当距离公式选定后,与之配套的直线方程又要做出选择:选$y=k(x-m)$还是选$x=ty+m$?因为前面选(4),目标是y_1y_2,所以要选$x=ty+m$作为直线l方程为宜。

解:(Ⅱ)设直线l的方程:$x=ty+m$(由题意可知$t\neq0$),$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,将直线l的方程与抛物线方程联立得$y^2-4ty-4m=0$,则$\Delta=16t^2+16m$,$\because m>0$,$\therefore\Delta>0$恒成立,所以$y_1y_2=-4m$,于是有

$$m^2=\sqrt{1+(\frac{1}{k})^2}\cdot|y_1-0|\cdot\sqrt{1+(\frac{1}{k})^2}|y_2-0|=[1+(\frac{1}{k})^2]|y_1y_2|=4(1+t^2)m,$$

因为$m>0$,所以两边约去m可得:

$m=4(1+t^2)\geqslant4$,当$t=0$时,m取最小值4,所以实数m的取值范围是$[4,+\infty)$.

评析:做圆锥曲线问题,不但要有目标意识,而且要有全局意识,不要一开始就设直线方程,要根据目标需要再选定直线方程的形式,这也是培养运算素养的需要。考生要在明晰运算对象的基础上,明确目标,再依据运算法则选择运算方法、设计运算程序,最终求得结果。

二、根据图形的特殊性,选择距离转化

距离问题是圆锥曲线中的常见问题。考生如果不做分析与选择,随意应用距离公式计算,往往增大运算量,降低正确率。那么如何选择距离公式呢?一是参看例1,写出各种情形的距离公式,结合题设条件做出选择;二是根据图形的特殊性,可以转化距离,点线距离与两点之间的距离相互转化,最终达到减少运算量的目的。具体转化模式是:

$$\text{点到直线距离}\ \underset{\text{求两点之间距离最小值}}{\overset{\text{当知道点和垂足的横坐标或纵坐标}}{\rightleftarrows}}\ \text{两点之间距离}$$

例2:*已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的一个焦点为$F(2,0)$,且离心率为$\frac{\sqrt{6}}{3}$.(Ⅰ)求椭圆方程;(Ⅱ)斜率为$k$的直线$l$过点$F$,且与椭圆交于$A$,$B$两点,$P$为直线$x=3$上的一点,若$\triangle ABP$为等边三角形,求直线$l$的方程.*

解题思路:直接表示等边三角形的三边长度相等,计算量大,所以考生要先把等边三角形转化为高和边长的关系,但是计算高的运算量较大,而将高(点线距离)转化为点与垂足之间的距离(即两点间的距离),运算量大幅减少。

解:(Ⅰ)$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$;(Ⅱ)直线$l$的方程为$y=k(x-2)$.

联立方程组$\begin{cases}y=k(x-2)\\ \frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1\end{cases}$,消去$y$并整理得$(3k^2+1)x^2-12k^2x+12k^2-6=0$.

因为直线$y=k(x-2)$恒过定点$(2,0)$在椭圆内部,所以$\Delta>0$恒成立.

设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$.　故$x_1+x_2=\frac{12k^2}{3k^2+1}$,由于直线$AB$过右焦点,所以

$|AB|=2a-e(x_1+x_2)=2\sqrt{6}-\frac{\sqrt{6}}{3}\cdot\frac{12k^2}{3k^2+1}=\frac{2\sqrt{6}(1+k^2)}{3k^2+1}$,设$AB$的中点为$M(x_0,y_0)$.

可得$x_0=\frac{6k^2}{3k^2+1}$,直线MP的斜率为$-\frac{1}{k}$,又$x_P=3$,

所以$|MP|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\cdot|x_0-x_P|=\sqrt{\frac{k^2+1}{k^2}}\cdot\frac{3(k^2+1)}{(3k^2+1)}$.

当$\triangle ABP$为正三角形时,$|MP|=\frac{\sqrt{3}}{2}|AB|$,

可得$\sqrt{\frac{k^2+1}{k^2}}\cdot\frac{3(k^2+1)}{(3k^2+1)}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2\sqrt{6}(k^2+1)}{3k^2+1}$,解得$k=\pm1$满足$\Delta>0$.

即直线l的方程为$x-y-2=0$,或$x+y-2=0$.

评析:考生计算$|MP|$,若用点线距离公式计算,还需算MP的方程,再求点P的坐标,会增加一倍的运算量。这里将点线距离转化为两点之间的距离是明智之举。但有时将两点间的距离转化为点线距离,又可减少运算量。为此,考生要具体问题具体分析。

三、根据图形的特殊性,选择面积公式

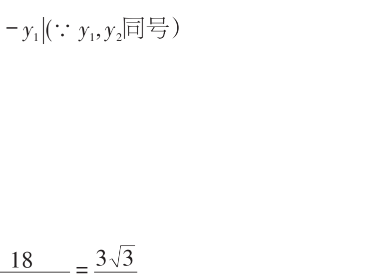
计算图形的面积,考生可以选择图形的面积公式。比如计算三角形的面积,当三角形独立存在时,大家可以用$s_{\triangle}=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}ab\sin C$直接求三角形面积,但是当三角形位于一个组合图形中时,可以考虑与其他图形的关系,比如可以用一个大三角形面积减去一个小三角形面积。又比如计算平行四边形面积时,如果直接算不方便,考生可以通过计算三角形面积计算四边形面积,比如$s_{四边形}=4s_{\triangle}$,$s_{四边形}=2s_{\triangle}$等。总之,计算面积时,考生要关注图形的特殊性,灵活选择计算面积的方法,这样可以优化运算量,同时也是培养运算素养的契机。

例3:*过点$P(-4,0)$的直线l交椭圆C:$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$于$A$,$B$两点,$F$为左焦点.求$\triangle AFB$的面积最大值.*

解题思路:考生容易想到直接计算AB的长与AB上的高,再计算$\triangle AFB$的面积。虽然思路可行,但运算量较大,而且后面求面积函数的最大值也比较困难。而根据组合图形的特殊性,选择减法,即用$\triangle PFB$的面积减去$\triangle PFA$的面积可得$\triangle AFB$的面积。此时,考生可以考虑用纵坐标表示三角形的高,底边是定值,由于纵坐标是目标,所以在设直线AB的方程时,需要选择直线方程的横截式为宜,这样可以减少一定的运算量。

解:设直线AB方程:$x=my-4$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,(不妨设$y_2>y_1$)

将直线AB方程:$x=my-4$与椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$联立得:



$(3m^2+4)y^2-24my+36=0$,

$\Delta=(-24m)^2-4(3m^2+4)\cdot36>0$

$\Rightarrow m^2-4>0\Rightarrow m\in(2,+\infty)\cup(-\infty,-2)$,

$y_1+y_2=\frac{24m}{3m^2+4}$,$y_1y_2=\frac{36}{3m^2+4}$,

所以$s_{\triangle AFB}=s_{\triangle PFB}-s_{\triangle PFA}=\frac{1}{2}|PF||y_2|-\frac{1}{2}|PF||y_1|=\frac{3}{2}|y_2-y_1|$($\because y_1,y_2$同号)

$=\frac{3}{2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\frac{3}{2}\sqrt{\left(\frac{24m}{3m^2+4}\right)^2-4\cdot\frac{36}{3m^2+4}}$

$=18\cdot\frac{\sqrt{m^2-4}}{3m^2+4}\left(m\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)\right)$,

设$\sqrt{m^2-4}=t(t>0)$,则$m^2=t^2+4$,

所以$s_{\triangle AFB}=18\cdot\frac{t}{3(t^2+4)+4}=\frac{18t}{3t^2+16}=\frac{18}{3t+\frac{16}{t}}\leqslant\frac{18}{2\sqrt{3t\cdot\frac{16}{t}}}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$,

当且仅当$3t=\frac{16}{t}\Rightarrow t=\frac{4\sqrt{3}}{3}$,即$m=\pm\frac{2\sqrt{21}}{3}$时,$\triangle AFB$的面积取得最大值$\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

评析:思路选择对优化运算非常重要,主要体现在对面积计算方式与直线方程形式的灵活选择。如果选择直线方程的纵截式计算,将会导致后面的面积函数更加复杂,为后面求最大值带来一定后患。值得一提的是,后面求面积最大值时,上面解法并不是最优解,考生可以直接配系数,用均值不等式凑商为定值,直接求出最大值。其思路是:

$$s_{\triangle AFB}=\frac{18}{4\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{(3m^2-12)\cdot16}}{3m^2+4}\leqslant\frac{18}{4\sqrt{3}}\cdot\frac{\frac{(3m^2-12)+16}{2}}{3m^2+4}=\frac{18}{4\sqrt{3}}\cdot\frac{3m^2+4}{2(3m^2+4)}=\frac{3\sqrt{3}}{4},$$

当且仅当$3m^2-12=16\Rightarrow m=\pm\frac{2\sqrt{21}}{3}$时,$\triangle AFB$的面积取得最大值$\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

笔者建议:在基础不是很好的情况下,考生掌握上述比较自然的方法为宜;基础较好的同学可考虑用这两种方法,然后进行对比,让运算素养在多种思路的体验中得到提升。

责编/宋 迪　版式/王 慧　热线/82837146　邮箱/kaoshibao@bjeea.cn