寒假数学备考　我们能做些啥

北京市第八中学教师　王 晨　王子怡

高三第一学期就要结束了，在一轮复习后，老师希望大家能认真梳理知识体系，总结题型方法，通过收集错题不断扎实基础，通过破解难题不断提升素养，最终融会贯通．为此，老师特为大家梳理如下考点．

基础知识可以按照选择、填空题分为14个考点，分别是：①集合；②复数；③函数的图像与性质；④函数的图像变换；⑤三角函数概念与公式；⑥解三角形；⑦直线和圆；⑧椭圆、双曲线、抛物线小题；⑨不等式；⑩充要条件；⑪数列小题；⑫向量；⑬二项式定理；⑭立体几何小题．我们要细化不同考点，根据题型对解题方法做不同梳理，下面以2个考点为例，为大家详细解读．

一、考点②复数：难度不大，一般以基础题为主

1．概念

（1）复数：$z=a+bi$，$a,b\in\mathbf{R}$，a叫做实部，b叫做虚部；实数：$z=a+bi$，$b=0$；虚数：$z=a+bi$，$b\neq0$；纯虚数：$z=a+bi$，$a=0$且$b\neq0$．

（2）共轭复数：$z_1=a+bi$和$z_2=a-bi$．

（3）复平面上的点：$z=a+bi$对应点(a,b)．

（4）模：$|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$，$|z_1z_2|=|z_1||z_2|$，$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$．

2．四则运算（$z_1=a+bi$，$z_2=c+di$）

（1）$z_1+z_2=(a+c)+(b+d)i$．

（2）$z_1-z_2=(a-c)+(b-d)i$．

（3）$z_1z_2=(ac-bd)+(ad+bc)i$．

（4）$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2}=\dfrac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$．

3．检查方法：用逆运算再算一遍

题目让我们算两个复数的和，我们可以用算出来的和减去其中一个复数，看是否等于另一个复数．减法、乘法、除法同理．

二、考点⑫向量：题目较为灵活，中难档题居多

1．常规问题

（1）概念：向量共线，向量平行，两个向量同向、反向，相等向量，零向量．

【经典例题】设$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$是非零向量，则下列命题中______是真命题．

命题p：若$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=0$，则$\vec{a}\cdot\vec{c}=0$；

命题q：若$\vec{a}\parallel\vec{b}$，$\vec{b}\parallel\vec{c}$，则$\vec{a}\parallel\vec{c}$．

答案：命题q．如果没有$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$是非零向量这个条件，命题q为假命题，因为$\vec{b}$可以是零向量．

（2）向量的模

解题方法：i．对含有模的等式平方；ii．数形结合，关注条件的几何意义．

【经典例题】设向量$\vec{a},\vec{b}$满足$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{10}$，$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{10}$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=$________．

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

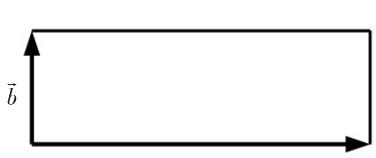
答案：A

法i：

$$\begin{cases}|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{10}\\|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{10}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|\vec{a}+\vec{b}|^2=10\\|\vec{a}-\vec{b}|^2=10\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=10\\|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=10\end{cases},$$

两式相减，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$．

法ii：如图，$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$说明平行四边形$ABCD$的对角线相等，则平行四边形$ABCD$为矩形，所以$\vec{a}\perp\vec{b}$，即$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$．



（3）坐标运算：线性运算（加法、减法、数乘），数量积．

【经典例题】设向量$\vec{a}=(3,m)$，$\vec{b}=(1,-1)$，若$\vec{a}\perp\vec{b}$，则$m=$________；若$\vec{a}\parallel\vec{b}$，则$m=$________．

答案：3，−3

2．能力提升题

（1）线性运算：明确$\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$中$\lambda$和$\mu$的几何意义，$\lambda+\mu$的几何意义．

解题方法：i．平行四边形法则；ii．相似三角形；iii．解三角形．

【经典例题】在平面直角坐标系中，O是坐标原点，两定点A,B满足$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2$，则点集$\left\{P\,\middle|\,\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB},|\lambda|+|\mu|\leqslant1,\lambda,\mu\in\mathbf{R}\right\}$所表示的区域的面积是________．

A．$2\sqrt{2}$　　B．$4\sqrt{2}$　　C．$2\sqrt{3}$　　D．$4\sqrt{3}$

答案：D

$S=4\times\dfrac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\dfrac{\pi}{3}=4\sqrt{3}$，由分类讨论可知：

当$\lambda\geqslant0$，$\mu\geqslant0$时，表示区域如图1；

当$\lambda\geqslant0$，$\mu<0$时，表示区域如图2；

当$\lambda<0$，$\mu<0$时，表示区域如图3；

当$\lambda<0$，$\mu\geqslant0$时，表示区域如图4．

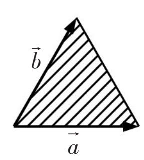


图1

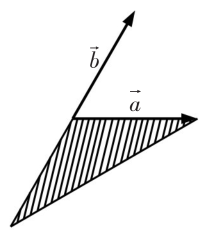


图2

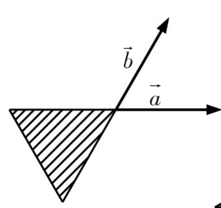


图3

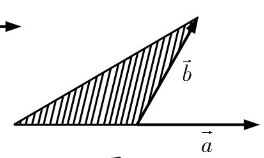


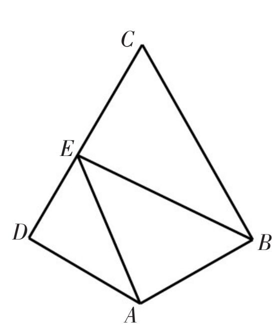
图4

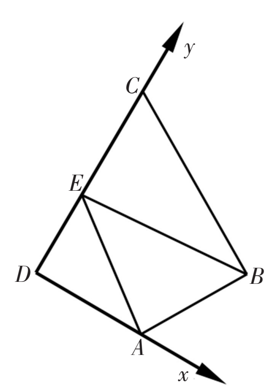
（2）数量积

解题方法：i．定义：$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos<\vec{a},\vec{b}>$；ii．数量积的几何意义（投影）；iii．建系，利用坐标进行运算；iv．向量拆分；v．极化恒等式：比如$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BE}=|\overrightarrow{EH}|^2-\dfrac{1}{4}|\overrightarrow{AB}|^2$，其中$H$是线段$AB$的中点．

【经典例题】如图，在平面四边形$ABCD$中，$AB\perp BC$，$AD\perp CD$，$\angle BAD=120°$，$AB=AD=1$．若点E为边CD上的动点，则$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BE}$的最小值为________．

A．$\dfrac{21}{16}$　　B．$\dfrac{3}{2}$　　C．$\dfrac{25}{16}$　　D．3





答案：A

法i：因为$\angle CDA=90°$，所以D为原点，如图建系，则$A(1,0)$，$B\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$．设$E(0,y)$，$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BE}=(-1,\ y)\cdot\left(-\dfrac{3}{2},y-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=y^2-\dfrac{\sqrt{3}}{2}y+\dfrac{3}{2}=\left(y-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)^2+\dfrac{21}{16}\geqslant\dfrac{21}{16}$，当且仅当$y=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$时等号成立．

法ii：设$|\overrightarrow{DE}|=y$，$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BE}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE})\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE})=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{CE}=\left(y-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)^2+\dfrac{21}{16}\geqslant\dfrac{21}{16}$，当且仅当$y=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$时等号成立．

法iii：取线段AB的中点H，连接EH，则$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BE}=|\overrightarrow{EH}|^2-\dfrac{1}{4}|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{EH}|^2-\dfrac{1}{4}$，当$EH\perp CD$时，$|\overrightarrow{EH}|$最短，所以$|\overrightarrow{EH}|^2-\dfrac{1}{4}\geqslant\dfrac{25}{16}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{21}{16}$．

解析：法i和法ii的本质是一样的，法iii则是转化成了研究线段上的动点到定点的最短距离．知识点的梳理因人而异．面对同一个内容或同一道题，我们会有不同的认识和感悟．同学们只有找到适合自己的梳理方式，不断完善内容体系，不断填充题目，才能在这个过程中不断提升自己的数学实力．问题看得更透彻了，反映到考试中，选择填空题才不会失误．而解答题更需要有一套完整的思路以及解决问题的办法，比如下面这道导数题，我们给出三种思路．

题目：已知$f(x)=axe^x-2\ln x-2x$有两个零点，求a的取值范围．

法i：直接求导，分类讨论

$f'(x)=a(x+1)e^x-\dfrac{2}{x}-2=(x+1)\left(ae^x-\dfrac{2}{x}\right)$，

令$g(x)=ae^x-\dfrac{2}{x}$．

（1）当$a\leqslant0$时，$g(x)<0$，$f'(x)<0$，故$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减，此时$f(x)$至多有一个零点．

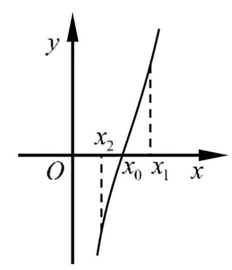
（2）当$a>0$时，$g'(x)=ae^x+\dfrac{2}{x^2}>0$，所以$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，且存在$x_0$使得$g(x_0)=0$．

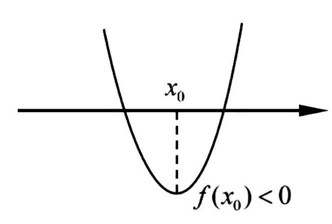
所以$f(x)\geqslant f(x_0)=ax_0e^{x_0}-2\ln x_0-2x_0$，其中$ae^{x_0}=\dfrac{2}{x_0}$．

消去a可得：$f(x_0)=2-2\ln x_0-x_0<0$，

即$1-\ln x_0-x_0>0$，易得$x_0>1$．

又$a=\dfrac{2}{x_0e^{x_0}}$，故$a\in\left(0,\dfrac{2}{e}\right)$．





法ii：参变量分离

令$f(x)=0$，有$axe^x=2\ln x+2x\Rightarrow a=\dfrac{2\ln x+2x}{xe^x}$，

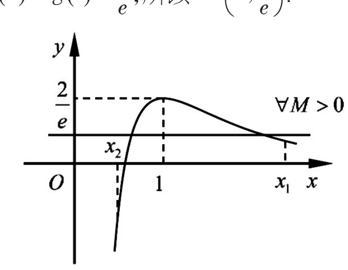
令$g(x)=\dfrac{2\ln x+2x}{xe^x}$，$g'(x)=\dfrac{(2x+2)(1-\ln x-x)}{x^2e^x}$，

因为$\dfrac{2x+2}{x^2e^x}>0$，考虑$h(x)=1-\ln x-x$．

显然$h(x)$在$(0,1)$上大于0，在$(1,+\infty)$上小于0．

所以$g(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减．

所以$g(x)\leqslant g(1)=\dfrac{2}{e}$，所以$a\in\left(0,\dfrac{2}{e}\right)$．



（下转第15版）

责编/宋 迪　版式/马婷婷　热线/82837146　邮箱/kaoshibao@bjeea.cn