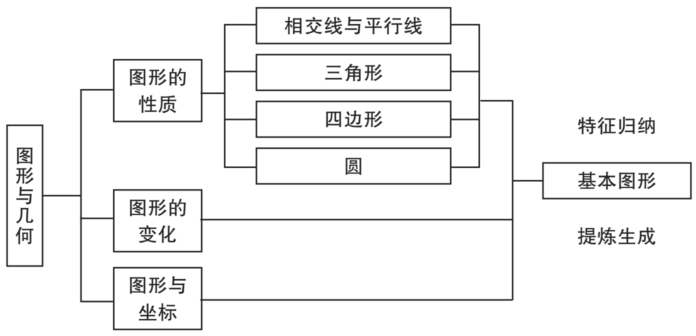
抓住基本图形特征 提升图形与几何综合能力

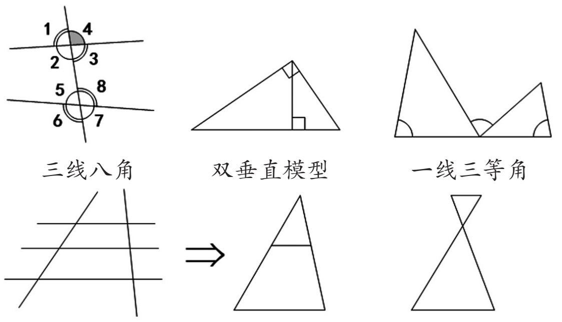
北京市昌平区教师进修学校教研员 滕滨州

一、知识概要

图形与几何的学习源于对基本图形的认识,源于对图形性质、图形变化以及图形与坐标中所呈现和生成的基本图形的认识和理解.



几何基本图形包括点、线、角、三角形、四边形、多边形、圆等,也包括我们自己提炼出的重要基本图形,如三线八角、双垂直模型、一线三等角,以及由基本事实"两条直线被一组平行线所截,所得的对应线段成比例"所推导提炼出的特殊图形A型图和X型图等.



三线八角 双垂直模型 一线三等角
基本事实 A型图 X型图

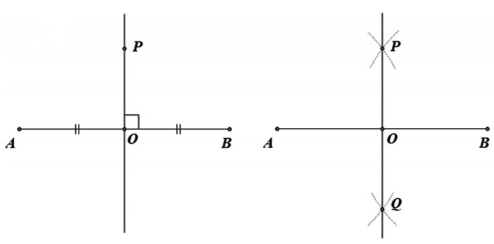
几何综合题,一般以基本图形为背景和载体,如等腰三角形、等边三角形、正方形等,通过图形的变化(平移,轴对称,旋转)来探究考查基本元素(边或角)之间的数量关系和位置关系等.

这些基本图形的性质、研究方法对几何综合图形问题的探究和解决具有重要导航作用.

二、关键内容

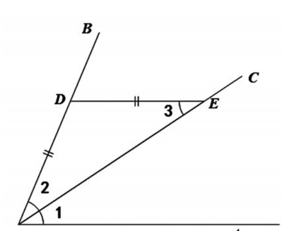
对于基本图形的认识,考生可从三个方面来理解.

1.从画图入手关注基本图形的生成过程.以线段的垂直平分线为例,它的画法可以是:(1)经过线段中点作线段的垂线,就形成了线段的垂直平分线;(2)也可以尺规作图,利用全等三角形知识作出线段的垂直平分线.



2.抓住复杂图形特征分解转化出基本图形.

以角平分线,等腰△,平行线的组合为例:知二推一,重点关注图形的分解.



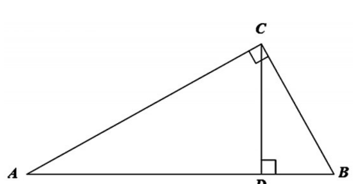
(1)角平分线+等腰△⇒平行

(2)角平分线+平行⇒等腰△

(3)等腰△+平行⇒角平分线

3.从得到的结论入手关注基本图形的推理过程.

以双垂直模型为例,条件:两个垂直;结论:互余的角,相等的角,相似的三角形,边之间的数量关系:六条线段中知道其中两条线段的长度,可以求出其他四条线段的长度,简称知二求四.



双垂直模型

条件: $AC\perp BC$,$CD\perp AB$ 于 D.

结论:

(1)三对互余的角;

(2)两对锐角相等:$\angle A=\angle BCD$,$\angle B=\angle ACD$;

(3)三对相似三角形:$\triangle ACB\backsim\triangle ADC\backsim\triangle CDB$;

(4)数量关系:$AC^2=AD\cdot AB$,$BC^2=BD\cdot BA$,$CD^2=AD\cdot BD$.

考生要重点关注结论的推理过程,如证明 $AC^2=AD\cdot AB$.除相似外还可以考虑三角函数知识:$\cos A=AD:AC=AC:AB\Rightarrow AC^2=AD\cdot AB$.

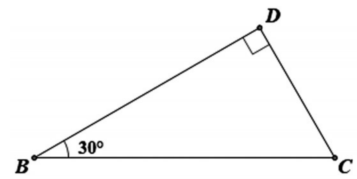
三、典型例题

【例】如图,在 $Rt\triangle DBC$ 中,$\angle BDC=90°$,$\angle CBD=30°$,$BC=4$.

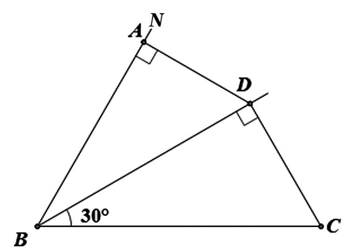
(1)$CD=$_____,$BD=$_______;

(2)将射线 BD 绕点 B 逆时针旋转30°,得到射线 BN,再过点 D 作 $DA\perp BN$ 于 A,依题意补全图形并直接写出 AB 的值,$AB=$_______;

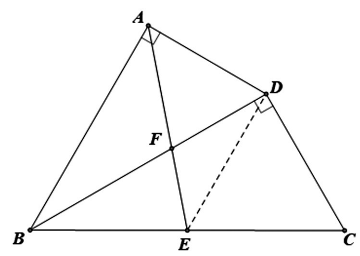
(3)若 E 为 BC 中点,连接 AE 交 BD 于 F,求 AE 和 DF 的长.



【分析】考生首先要看第(1)问,观察 $\triangle DBC$,发现这是有一个角等于30°的直角三角形,回顾它的性质,30°角所对的直角边等于斜边的一半,因为 $BC=4$,所以 $CD=2$,由勾股定理可得 $BD=2\sqrt{3}$,这里考生要重点归纳含30°角的直角三角形这个基本图形,三边的数量关系是 $1:2:\sqrt{3}$.



接着来看第(2)问,将射线 BD 绕点 B 逆时针旋转30°,得到射线 BN,再过点 D 作 $DA\perp BN$ 于 A,依题意补全图形后,观察得到的 $\triangle DAB$,由题意,$\angle ABD=30°$,$\angle BAD=90°$,这又是一个含30°角的直角三角形这个基本图形,由第一问得到 $BD=2\sqrt{3}$,$AD=\frac{1}{2}BD=\sqrt{3}$,$AB=\sqrt{3}AD=3$.



接下来看最后一问,若 E 为 BC 中点,连接 AE 交 BD 于 F,补全图形.点 E 为 BC 中点,见到中点,你想到了什么?一般中点会和等腰三角形、直角三角形等联系起来,等腰三角形会联想三线合一模型,而点 E 是直角三角形 DBC 斜边 BC 的中点,联想斜边中线模型,所以连接 DE,直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半,所以 $DE=BE=CE=\frac{1}{2}BC=2$.

这个模型中包含两个等腰三角形,$\triangle DBE$ 和 $\triangle DCE$.由等腰三角形性质,等边对等角,$\angle DBE=\angle BDE=30°$.在 $\triangle DAE$ 中,标记图形易求 $\angle ADE=90°$,$DE=2$,$AD=\sqrt{3}$,由勾股定理可得 $AE=\sqrt{7}$.

怎样求 AF 呢?继续观察分析图形,直线 DE 和 AB 有怎样的位置关系?

由题意得 $\angle DBC=\angle ABD=30°$,发现 BD 是 $\angle ABC$ 的平分线,由推得的等腰 $\triangle DBE$,得 $\angle DBE=\angle BDE$.所以 $\angle ABD=\angle BDE$.所以内错角相等,两直线平行,$DE\parallel AB$.由平行可得相似模型X型图.由 $DE\parallel AB$,可得两个三角形相似,相似比是 $2:3$.所以 $DF:BF=DE:BA=2:3$.

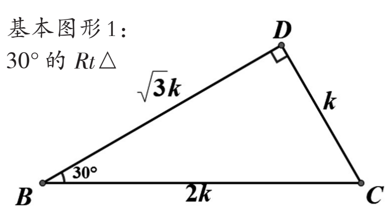
所以 $DF=\frac{2}{5}BD=\frac{2}{5}\times2\sqrt{3}=\frac{4}{5}\sqrt{3}$.考生也可以见比设 k,建立方程解决.

下面进行主要基本图形的归纳.

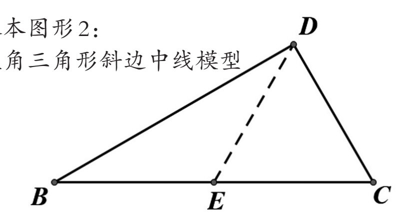
1.含30°角的直角三角形,结合图形理解三边的数量关系 $1:2:\sqrt{3}$;(此点有利于复习和掌握特殊角三角函数值)

2.直角三角形斜边中线模型,斜边中线等于斜边的一半,同时这个模型包含两个等腰三角形基本图形.

基本图形1:
30°的 $Rt\triangle$



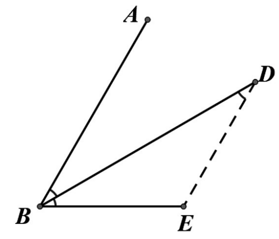
基本图形2:
直角三角形斜边中线模型



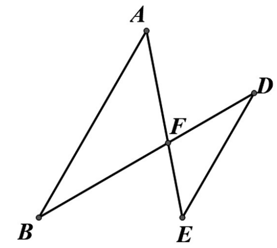
基本图形3,角平分线+等腰三角形可以推得两直线平行.本题中实质就是内错角相等,两直线平行.这个模型在圆中和其他复杂图形中也经常用到.

基本图形4,X型图,通过平行得到对应线段成比例和两个三角形相似,可以进行相似比的转化.

基本图形3:
角分线+等腰三角形⇒平行



基本图形4:
平行类:"X"型(也叫8字型)



四、总结与反思

认识基本图形可分三个层次:1.识别图形:发现基本图形→能画基本图形→由文字、符号或实物抽象出基本图形→从基本图形中识别基本元素及其关系.关键词:画图与识别.2.分解图形:从综合图形中分解基本图形,提炼拆解图形并进行特征分析.关键词:分解,提炼.3.创新图形:在分析解决问题中构造基本图形,或类比迁移基本图形,创造新的基本图形.关键词:构造,迁移,创造.

同学们,几何的学习就是抓住基本图形,抓住基本图形的关键特征,应用其性质及其相关结论快速找到解决问题的思路和方法.

责编/胡梦蝶 版式/罗京京 热线/82837146 邮箱/kaoshibao@bjeea.cn