从试题入手提升数列复习效果

东北师范大学附属中学朝阳学校教师　唐大友

函数是课程标准确定的高中数学内容四条主线之一，而数列是特殊的函数.在高考一轮复习中，考生要注重知识的再现和重构、情境的精准分析、能力的重点培养，提升“数列”复习效果.

一、对考查知识建框架图，加深知识理解

高考数学突出对“四基”(基础知识、基本方法、基本思想和基本活动经验)的考查，一轮复习更应对基础进行重构和深入理解.

知识与理解＼类别		数列	等差数列	等比数列
知识	定义	$\{a_n\}: a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$.	$a_{n+1}-a_n=d$（常数），$n\in N^*$.	$a_{n+1}\div a_n=q$（不为零的常数），$n\in N^*$.
	通项公式		$a_n=a_1+(n-1)d$	$a_n=a_1\cdot q^{n-1}$
	求和公式	$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$.	$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$，$S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d$.	$S_n=\begin{cases}na_1, & q=1,\\ \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}, & q\neq1.\end{cases}$
	重要性质	$a_n=\begin{cases}S_1, & n=1,\\ S_n-S_{n-1}, & n\geqslant2.\end{cases}$	若$m,n,p,t\in N^*$，则$a_m+a_n=a_p+a_t$.	若$m,n,p,t\in N^*$，则$a_m\cdot a_n=a_p\cdot a_t$.
理解	基本方法	观察、猜想、找规律	倒序相加法	错位相减法
	基本思想	函数思想、递推思想	一次函数、二次函数	指数函数
	基本活动经验	分类讨论思想(公式的选取)与方程的思想(知三求二)的运用		
		求和思想(整体思考与处理)的运用		
		阶差数列(一阶递推数列：等差数列、等比数列)		
		建立模型(构造新的等差数列、等比数列)		

对数列知识的深入理解，应在掌握数列知识的基础上理解数列的本质，感悟数列所蕴含的数学基本思想，积累数学思维和实践的基本活动经验，并促进学生形成和发展数学学科核心素养.

二、对考查素养分层，用知识解决相关情境问题

(一)在熟悉的情境中解决问题

例1 在等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=2, a_3+a_5=10$，则a_7等于(　　).

A.5　　B.8　　C.10　　D.14

【分析】本题呈现的问题情境是学生熟悉的等差数列、项与项和的问题，学生只需联系到等差数列的重要性质：项数和等，则项的和等，就能迅速得到：$a_1+a_7=a_3+a_5=10$，解得$a_7=8$，故选择B.

例2 能说明“在等比数列$\{a_n\}$中，若$a_2>a_1$，则$\{a_n\}$为递增数列”为假命题的$\{a_n\}$的一个通项公式.

【分析】本题呈现的问题情境是学生熟悉的等比数列的单调性、假命题、通项公式问题，是学生比较熟悉的开放性问题.面对等比数列的单调性问题，自然会联系到等比数列的分类：递增数列、递减数列、非零常数数列、摆动数列，满足$a_2>a_1$的摆动性的等比数列：$-1,1,-1,1,-1,1,\cdots$，非常容易得到等比数列的通项公式：$a_n=(-1)^n, n\in N^*$(答案不唯一).

(二)在关联的情境中解决问题

例3 北京天坛的圜丘坛为古代祭天的场所，分上、中、下三层，上层中心有一块圆形石板(称为天心石)，环绕天心石砌9块扇面形石板构成第一环，向外每环依次增加9块，下一层的第一环比上一层的最后一环多9块，向外每环依次也增加9块，已知每层环数相同，且下层比中层多729块，则三层共有扇面形石板(不含天心石)(　　).

A.3699块　　B.3474块　　C.3402块　　D.3339块

【分析】本题呈现的问题情境是与数列关联等差数列的求和问题.学生要在关联情境中抽象出一个等差数列，能够在新的情境中选择与等差数列相关的知识与方法解决问题.设第n环天石心块数为a_n，第一层共有n环，则$\{a_n\}$是以9为首项，9为公差的等差数列，$a_n=9+(n-1)\times9=9n$，设S_n为$\{a_n\}$的前n项和，则第一层、第二层、第三层的块数分别为$S_n, S_{2n}-S_n, S_{3n}-S_{2n}$，因为下层比中层多729块，所以$S_{3n}-S_{2n}=S_{2n}-S_n+729$，

即$\dfrac{3n(9+27n)}{2}-\dfrac{2n(9+18n)}{2}=\dfrac{2n(9+18n)}{2}-\dfrac{n(9+9n)}{2}+729$，

即$9n^2=729$，解得$n=9$，所以$S_{3n}=S_{27}=\dfrac{27(9+9\times27)}{2}=3402$，故选择C.

(三)在综合的情境中解决问题

例4 0-1周期序列在通信技术中有着重要应用.若序列$a_1a_2L\,a_nL$满足$a_i\in\{0,1\}$ $(i=1,2,L)$，且存在正整数m，使得$a_{i+m}=a_i(i=1,2,L)$成立，则称其为0-1周期序列，并称满足$a_{i+m}=a_i(i=1,2,L)$的最小正整数m为这个序列的周期，对于周期为m的0-1序列$a_1a_2L\,a_nL$，$C(k)=\dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m}a_ia_{i+k}(k=1,2,L,m-1)$是描述其性质的重要指标，下列周期为5的0-1序列中，满足的$C(k)\leqslant\dfrac{1}{5}(k=1,2,L,m-1)$是描述其性质的重要指标，下列周期为5的0-1序列中，满足$C(k)\leqslant\dfrac{1}{5}(k=1,2,3,4,5)$的序列是(　　).

A.11010L　　B.11011L　　C.10001L　　D.11001L

【分析】本题呈现的问题中涉及了周期数列，以及周期为m的0-1周期序列的新定义，描述其性质的求和指标.学生经过综合分析，由$a_{i+m}=a_i$知序列a_i的周期为m，因$m=5$，则$C(k)=\dfrac{1}{5}\sum\limits_{i=1}^{5}a_ia_{i+k}, k=1,2,3,4$，学生再分别对选项进行逐一验证，并且对选项A要验证$C(1)$和$C(2)$，可知选择C.

三、对考查能力分类，凸显数学关键能力培养

(一)转化能力的培养

例5 已知$\{a_n\}$为等差数列，$\{b_n\}$为等比数列，其公比$q\neq1$，且$b_i>0(i=1,2,\cdots n)$，若$a_1=b_1, a_{11}=b_{11}$，则(　　).

A.$a_6>b_6$　　B.$a_6=b_6$　　C.$a_6<b_6$　　D.$a_6<b_6$或$a_6>b_6$

【分析】本题考查了学生综合运用等差数列、等比数列性质，灵活转化为均值不等式的问题进行求解.由已知条件可得$a_1a_{11}=b_1b_{11}$，根据等比数列的性质有$b_1b_{11}=b_6^2=a_1a_{11}\leqslant(\dfrac{a_1+a_{11}}{2})^2=a_6^2$，又因$b_i>0$，且$q\neq1$，所以$b_1\neq b_{11}$，即$a_1\neq a_{11}$，所以$b_6^2<a_6^2$，则$a_6>b_6$，故选择A.

(二)运算能力的培养

例6 已知$\{a_n\}$是公差为d的无穷等差数列，其前n项和为S_n.又，且$S_5=40$，是否存在大于1的正整数k，使得$S_k=S_1$？若存在，求k的值；若不存在，说明理由.

从①$a_1=4$，②$d=-2$这两个条件中任选一个，补充在上面问题中并作答.

注：如果选择两个条件分别解答，按第一个解答计分.

【分析】本题是结构不良问题，需要先从给出的两个条件中任选一个作为已知条件，再运用等差数列前n项和公式，对建立的方程进行求解，并判断k的值是否为大于1的正整数，重点考查学生的运算能力.如果选择条件①，由$S_5=4$，求得$d=2$，$S_k=k^2+3k=4$，解得$k=1$或$k=-4$，不满足$k>1$，因此，不存在正整数$k(k>1)$，使得$S_k=S_1$.同理，如果选择条件②，$k=12$满足条件.

(三)整体处理问题能力的培养

例7 等比数列$\{a_n\}$中共有奇数项，所有奇数项和$S_{奇}=255$，所有偶数项和$S_{偶}=-126$，末项是192，则首项a_1等于(　　).

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

【分析】本题需要学生把除了最后一项的奇数项和偶数项分别作为一个整体，寻求这两个整体之间的关系，并且要把抽象的奇数项具体化，再运用等比数列求和公式进行求解.设等比数列$\{a_n\}$共有$2k+1(k\in N^*)$项，则$a_{2k+1}=192$，则$S_{奇}=a_1+a_3+\cdots+a_{2k-1}+a_{2k+1}$

$$=\frac{1}{q}(a_2+a_4+\cdots+a_{2k})+a_{2k+1}=\frac{1}{q}S_{偶}+a_{2k+1}=-\frac{126}{q}+192=255，解得q=-2，$$

又因$S_{奇}=\dfrac{a_1[1-q^{2(k+1)}]}{1-q^2}=255, a_{2k+1}=a_1q^{2k}=192$，解得$a_1=3$，故选C.

例8 已知$\{a_n\}$是各项均为整数的递增数列，且$a_1\geqslant3$.若$a_1+a_2+\cdots+a_n=100$，则n的最大值为(　　).

A.9　　B.10　　C.11　　D.12

【分析】本题是2021年北京高考数学第10题，考查学生充分利用已知条件，进行整体分析问题、解决问题的能力.在数列前n项和一定的前提下，要使得n的取值尽可能大，则数列$\{a_n\}$的前面所有项要尽可能小，还要满足$a_1\geqslant3$，并且该数列是各项为整数的递增数列，依据选项，可探索

$$3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13=\frac{11\times(3+13)}{2}=88<100，$$

$$3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14=\frac{12\times(3+14)}{2}=102>100，$$

则可确定：

$$3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+25=\frac{10\times(3+12)}{2}+25=100，$$

故n的最大值为11，选择C.

总之，同学们在一轮复习过程中，紧紧围绕高考考点、素养和能力，抓住数列是特殊的函数，运用递推思想、函数思想和方程思想对问题情境进行深入细致分析、合理转化、必要时进行整体处理，就能提升学生综合解决问题的能力，复习就能收到更好效果.

责编/宋 迪　版式/陈 琴　热线/82837146　邮箱/kaoshibao@bjeea.cn