深挖几何关系 突破代数运算

——解析几何的答题策略

北京中学教师 胡园燕

解析几何是高中阶段几何部分的重要内容.在往年高考中,从知识点看,选填题基本考查圆、抛物线、双曲线,解答题基本考查椭圆;从题型看,涉及斜率、弦长、面积、角度、垂直、中点等,以及三点共线、定点问题、定值问题、对称问题、最值与取值范围问题、恒成立问题、存在性探究问题、平面图形的形状研究、直线与椭圆的位置关系等.考生复习时不仅要对知识进一步梳理和完善,掌握解决典型问题的通性通法,更要抓住解析几何中几何与代数的关系.

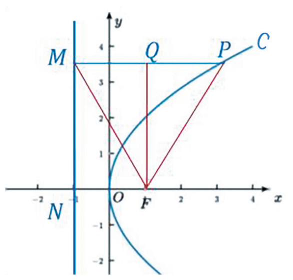
一、解析几何的本质是几何

对解析几何的本质是几何这一点,考生要有清晰的认识,在分析问题的过程中才能用好图形的性质.比如,遇到等边三角形或等腰三角形,常常要利用"三线合一"求解;解答平行四边形中的相关问题,常用到对边平行的位置关系,对角线互相平分的性质;解答圆的问题常用到垂径定理,直径所对圆周角为直角;抛物线中的线段长度问题,尤其是与焦点有关的线段,常会利用抛物线定义进行线段转化等.

【例1】已知抛物线 $C: y^2=4x$ 的焦点为 F,准线为 l, P 为 C 上一点,过 P 作 l 的垂线,垂足为 M.若 $|MF|=|PF|$,则 $|PM|=$( )

(A) 2　　(B) $\sqrt{3}$　　(C) 4　　(D) $2\sqrt{3}$

【分析】根据抛物线的对称性,不妨设 P 是抛物线 C 上第一象限内的一点.



方法一:由 $|MF|=|PF|$,可知 $\triangle PFM$ 是等腰三角形.

过 F 作 PM 的垂线,垂足为 Q,则点 Q 是 PM 的中点,

所以 $|PM|=2|MQ|$.

由此可得,四边形 $MNFQ$ 是矩形,

所以 $|MQ|=|NF|=1$,所以 $|PM|=2$.

方法二:由抛物线的定义,得 $|PM|=|PF|$.

又 $|MF|=|PF|$,所以 $\triangle PFM$ 是等边三角形,可得 $\angle MFN=60^\circ$.

在直角三角形 MNF 中, $|MF|=2|NF|=2$,所以 $|PM|=2$.

【例2】在平面直角坐标系中,记 d 为点 $P(\cos\theta,\sin\theta)$ 到直线 $l: x-my-2=0$ 的距离,当 θ, m 变化时, d 的最大值为________.

【分析】方法一:按照题设的叙述,写出 d 的代数式,然后化简为关于 m 的函数,最后求函数的最值.过程如下:

由题意可得

$$d=\frac{|\cos\theta-m\sin\theta-2|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{|m\sin\theta-\cos\theta+2|}{\sqrt{m^2+1}}$$

$$=\frac{\left|\sqrt{m^2+1}\left(\frac{m}{\sqrt{m^2+1}}\sin\theta-\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}\cos\theta\right)+2\right|}{\sqrt{m^2+1}}$$

$$=\frac{\left|\sqrt{m^2+1}\sin(\theta-\varphi)+2\right|}{\sqrt{m^2+1}}$$

(其中 $\cos\varphi=\frac{m}{\sqrt{m^2+1}}$, $\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}$)

$\because -1\leqslant\sin(\theta-\varphi)\leqslant 1$,

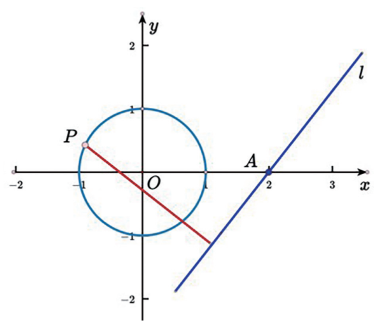
$\therefore \frac{\left|2-\sqrt{m^2+1}\right|}{\sqrt{m^2+1}}\leqslant d\leqslant\frac{\left|2+\sqrt{m^2+1}\right|}{\sqrt{m^2+1}}$,

$\frac{2+\sqrt{m^2+1}}{\sqrt{m^2+1}}=1+\frac{2}{\sqrt{m^2+1}}$,

$\therefore$ 当 $m=0$ 时, d 取得最大值3.

方法二:先对点 P 进行几何分析,然后双参数控制变量,寻求最值.

由点 $P(\cos\theta,\sin\theta)$,可发现点 P 的轨迹是圆心在原点的单位圆,如图.



根据直线的方程 $l: x-my-2=0$,可知 l 过定点 $A(2,0)$.

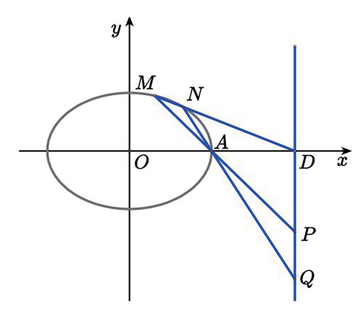
由圆的对称性知,当 $l\perp AO$ 时, P 到直线 l 的距离最大,此时 $m=0$, d 取得最大值3.

例2的两种方法,清晰地体现了代数问题几何化的优势.尤其是方法二,运用数形结合思想,利用几何关系,借助图形直观,简化了代数运算,是做选填题的常用策略.

二、解决问题的工具是代数

解析几何问题离不开数学运算,尤其是解答题.考生要明确运算对象,探究运算方向,选择运算方法,设计运算程序,同时要掌握一些基本的运算策略,才能准确、快捷地求得运算结果.

【例3】设椭圆 $C: \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ 的右顶点为 A,过点 $D(4,0)$ 的直线 l 与椭圆 C 交于不同的两点 M, N (均异于点 A),直线 AM, AN 分别与直线 $x=4$ 交于点 P, Q.求证: $|DP|\cdot|DQ|$ 为定值.



【分析】设 $M(x_1,y_1)$, $N(x_2,y_2)$,

因为点 A 的坐标为 $(2,0)$,

所以直线 AM 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1-2}(x-2)$.

令 $x=4$,得点 P 的纵坐标为 $y_P=\frac{2y_1}{x_1-2}$,同理 $y_Q=\frac{2y_2}{x_2-2}$.

于是, $|DP|\cdot|DQ|=|y_P\cdot y_Q|=\left|\frac{4y_1y_2}{(x_1-2)(x_2-2)}\right|$.

在此,消哪类元运算量小呢?下面把两种方法都写一下,再进行对比.

方法一:消 y

由题意知,直线 l 的斜率存在且不为0.设直线 l 的方程为 $y=k(x-4)\ (k\neq 0)$,

所以 $|DP|=2|k|\left|\frac{x_1-4}{x_1-2}\right|$.同理,可得 $|DQ|=2|k|\left|\frac{x_2-4}{x_2-2}\right|$.

$$\text{于是}|DP|\cdot|DQ|=4k^2\left|\frac{(x_1-4)(x_2-4)}{(x_1-2)(x_2-2)}\right|$$

$$=4k^2\left|\frac{x_1x_2-4(x_1+x_2)+16}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}\right|$$

由 $\begin{cases}y=k(x-4)\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1\end{cases}$ 得 $(2k^2+1)x^2-16k^2x+32k^2-4=0$.

依题意 $\Delta=(-16k^2)^2-4(2k^2+1)(32k^2-4)>0$,

解得 $k\in(-\frac{\sqrt{6}}{6},0)\cup(0,\frac{\sqrt{6}}{6})$.

则 $x_1+x_2=\frac{16k^2}{2k^2+1}$, $x_1x_2=\frac{32k^2-4}{2k^2+1}$.

$$\text{于是}|DP|\cdot|DQ|=4k^2\left|\frac{\frac{32k^2-4}{2k^2+1}-4\times\frac{16k^2}{2k^2+1}+16}{\frac{32k^2-4}{2k^2+1}-2\times\frac{16k^2}{2k^2+1}+4}\right|$$

$$=4k^2\left|\frac{32k^2-4-64k^2+16(2k^2+1)}{32k^2-4-32k^2+4(2k^2+1)}\right|$$

$$=4k^2\times\frac{12}{8k^2}$$

$$=6$$

所以 $|DP|\cdot|DQ|$ 为定值6.

方法二:消 x

由题意知,直线 l 的斜率存在且不为0.

设直线的方程为 $x=my+4\ (m\neq 0)$.

$$\text{于是}|DP|\cdot|DQ|=\left|\frac{4y_1y_2}{(my_1+2)(my_2+2)}\right|$$

$$=\left|\frac{4y_1y_2}{m^2y_1y_2+2m(y_1+y_2)+4}\right|$$

由 $\begin{cases}x=my+4\\ x^2+2y^2=4\end{cases}$ 得 $(m^2+2)y^2+8my+12=0$.

$\Delta=64m^2-48(m^2+2)>0$,

解得 $m\in(-\infty,-\sqrt{6})\cup(\sqrt{6},+\infty)$.

则 $y_1+y_2=\frac{-8m}{m^2+2}$, $y_1y_2=\frac{12}{m^2+2}$.

所以, $|DP|\cdot|DQ|=\left|\frac{48}{12m^2-16m^2+4(m^2+2)}\right|=\frac{48}{8}=6$

所以 $|DP|\cdot|DQ|$ 为定值6.

对比两种方法的运算过程,能看到方法二在代入消元的过程中分子结构简单,使得计算步骤略少,能有效提升计算的准确性.因此,在对代数式化简消参的过程中,要合理选择消元对象.

解析几何中的运算是建立在几何背景下的代数运算,所以考生要先用几何眼光观察,分析清楚几何图形的要素及其基本关系,再用代数语言表达,在运算过程中时刻注意利用图形的几何特征及图形间的关系来简化运算.这是解析几何突破运算难点的关键举措.

"运算"是代数的核心概念,"距离""角度"是几何的核心概念.面对解析几何问题,考生要将目光聚焦在核心概念上,要能从整体上更好地把握图形的几何特征,努力提高几何图形分析能力,即在落实数形结合思想上下功夫.

责编/刘海燕 版式/高 薪 热线/82837130 邮箱/kaoshibao@bjeea.cn