

浅谈立体几何学习中的“一二三”

北京市朝阳区外国语学校教师 刘嘉

(续4月6日第1623期)

三、立体几何部分常见的三个问题

“三”是指立体几何部分常见的三个问题.一是垂直和平行关系的判定问题;二是空间角的计算问题;三是空间中的存在性问题.一道常见的立体几何解答题,往往以这三个问题组成.下面举例分析.

【例3】如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$. $PA \perp PD, PA = PD, AB \perp AD, AB = 1, AD = 2, AC = CD = \sqrt{5}$.

(I)求证: $PD \perp$ 平面 PAB .

(II)求直线 PB 与平面 PCD 所成角的正弦值.

(III)在棱 PA 上是否存在点 M ,使得 $BM \parallel$ 平面 PCD ?若存在,求出 $\frac{AM}{AP}$ 的值,若不存在,说明理由.

【分析】(I)对于平行、垂直关系的判定问题,考生一般依据相应几何定理解决.“平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$ ”这个条件,从前文的垂直关系网络图可知,只能触发④,即面面垂直性质定理,得到线面垂直.结合本题分析,可知由此条件应得到 $BA \perp$ 平面 PDA ,进一步可得到 $BA \perp PD$.再结合题目“ $PA \perp PD$ ”的条件,便可触发线面垂直判定定理得到本问结论.

(II)对于空间角的计算,由前文分析可知,只需建立坐标系,计算出平面 PCD 法向量和直线 PB 方向向量,再利用“ $\sin \theta = |\cos \langle e, n \rangle| = \frac{|e \cdot n|}{|e||n|}$ ”便可解决.

(III)对于存在性问题,考生一般利用向量方法解决.首先假设在棱 PA 上存在点 M ,使得 $BM \parallel$ 平面 PCD .然后利用 P, M, A 三点共线这个事实列出向量方程 $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AP}, \lambda \in [0, 1]$,由 λ 表示出 M 坐标.最终通过 $BM \parallel$ 平面 PCD 的等价条件列方程解出 λ .若 λ 无解,或解不在 $[0, 1]$ 内,则不存在;若 $\lambda \in [0, 1]$,则存在相应的 M 点.本题所求 $\frac{AM}{AP}$ 的值即 λ .下面是详细解答.

【解】(I)因为平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD, AD$ 是两平面交线, $AB \perp AD$,所以 $AB \perp$ 平面 PAD .

又因为 $PD \subset$ 平面 PAD ,所以 $PD \perp AB$.

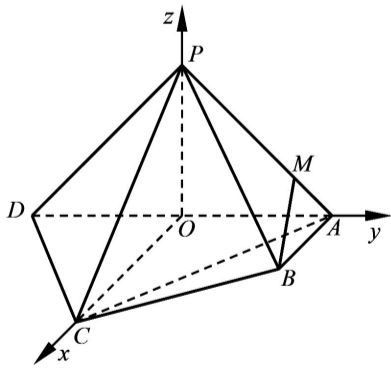
又因为 $PD \perp PA, PA \cap AB = A$,所以 $PD \perp$ 平面 PAB .

(II)取 AD 的中点 O ,连结 PO, CO .因为 $PA = AD$,所以 $PO \perp AD$.

又因为 $PD \subset$ 平面 PAD ,平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$,

所以 $PO \perp$ 平面 $ABCD$.因为 $CO \subset$ 平面 $ABCD$,所以 $PO \perp CO$.

因为 $AC = CD$,所以 $CO \perp AD$.如图建立空间直角坐标系 $O-xyz$.



由题意得, $A(0,1,0), B(1,1,0), C(2,0,0), D(0,-1,0), P(0,0,1)$,

设平面 PCD 的法向量为 $n = (x, y, z)$,则 $\begin{cases} n \cdot \overrightarrow{PD} = 0 \\ n \cdot \overrightarrow{PC} = 0 \end{cases}$,即 $\begin{cases} -y - z = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$.

令 $z = 2$,则 $x = 1, y = -2$.所以 $n = (1, -2, 2)$.

又 $\overrightarrow{PB} = (1, 1, -1)$,所以 $\cos \langle n, \overrightarrow{PB} \rangle = \frac{n \cdot \overrightarrow{PB}}{|n||\overrightarrow{PB}|} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

所以直线 PB 与平面 PCD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(III)设 M 是棱 PA 上一点,则存在 $\lambda \in [0, 1]$,使得 $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AP}$.

因此点 $M(0, 1 - \lambda, \lambda), \overrightarrow{BM} = (-1, -\lambda, \lambda)$.

因为 BM 不在平面 PCD 内,所以 $BM \parallel$ 平面 PCD 当且仅当 $\overrightarrow{BM} \cdot n = 0$,

即 $(-1, -\lambda, \lambda) \cdot (1, -2, 2) = 0$.解得 $\lambda = \frac{1}{4}$.

所以在棱 PA 上存在点 M 使得 $BM \parallel$ 平面 PCD ,此时 $\frac{AM}{AP} = \frac{1}{4}$.

(未完待续)

遗传专题复习策略与思考

北京市第四中学正高级教师 赵晓刚

(续4月6日第1623期)

【分析】两系杂交稻是三系杂交稻的优化.

(1)两系杂交稻不再需要借助保持系来繁殖不育系,在种子生产程序上减少了一个环节,从而降低了种子生产成本,可通过控制温度实现繁殖不育系.

(2)考查基本概念要素,说明雄性不育性状是由隐性基因控制且满足基因分离定律.

(3)不育起点温度越低,授粉时出现雄性不育的情况越少,不易出现自交和杂交种混杂的现象.

(4)提出的问题难度和区分度较大,在北京市2019年高考中有所体现,原理如图4.因为温敏不育系水稻在生殖季节,由于温度变化可能出现自交现象,使部分 F_1 无杂种优势,因此最好有隐性标记基因.杂交种 Bb 显绿色,而自交种 bb 显黄色,故黄色突变体的意义为,黄色基因作为标记基因,在苗期可筛选出杂交种中混有的自交种.

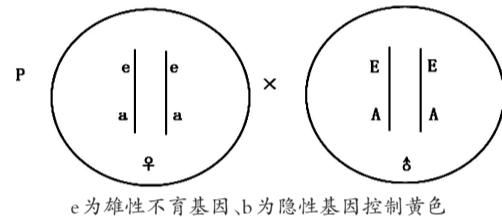


图4

3. 智能不育杂交育种技术

我国科研人员发现非温敏雄性不育系 mm 品系,将连锁的三个基因 M, P 和 R (P 是与花粉代谢有关的基因, R 为红色荧光蛋白基因)与 Ti 质粒连接,转入 mm 中,获得转基因植株.将转基因植株自交,结果如图5:

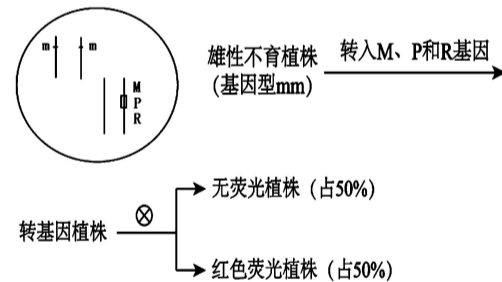


图5

【思考】

(1)用遗传图解来解释转基因植株自交后的性状分离比.

(2)推测 M, P, R 基因在育种过程中的功能.

(3)描述该转基因植株在育种工作中的优点.

【分析】非温敏雄性不育系优点是不受环境变化影响出现自交的现象,基因工程技术促进了育种的发展.(1)遗传图解如图6.(2) M 基因的功能,使转基因植株恢复雄性可育; P 基因功能,使带有 P 基因的花粉败育; R 基因的功能,作为标记基因辨别转基因品系和雄性不育系.(3)该转基因植株自交既可产生雄性不育系又可产生转基因品系,可源源不断产生雄性不育系.

	P	$MPRmm$	红色荧光
		$\downarrow \otimes$	
F_1	♀配子	$MPRm$	m
	♂配子	$MPRmm$ (红色荧光)	mm (无荧光)
	$MPRm$ (致死)	—	—

图6

三、解决“杂交育种年限长”,指向“单倍体育种”

单倍体育种的原理为染色体数目变异,主要程序包括花药离体培养和秋水仙素使染色体加倍.单倍体育种明显缩短育种年限,且排除显隐性干扰较快获得纯合子,在北京2017年高考中重点考查过.

我国研究者发现一种玉米突变体 S ,用 S 的花粉给普通玉米授粉,会结出一定比例的单倍体籽,如图7.

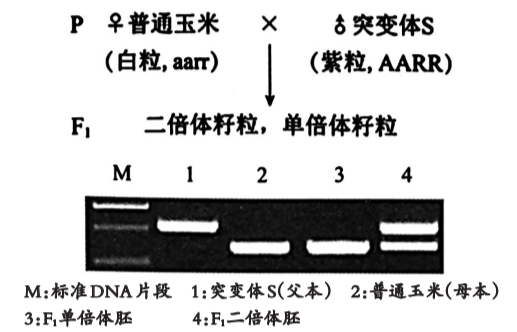


图7

【思考】

(1)从图7结果可以推测单倍体的来源.

(2)分析玉米籽粒颜色在育种中的作用.

(3)现有高产抗病白粒玉米纯合子(G)、抗旱抗倒伏白粒玉米纯合子(H),欲培育出高产抗病抗旱抗倒伏的品种.结合上述育种材料与方法,写出育种流程.

【分析】考生可借此体会北京高考的特点,学习资料和信息中获取单倍体的新方法,并在实践中应用解决新问题.

(1)依据电泳图谱推出单倍体是由卵细胞发育而来.

(2)玉米颜色作为标记性状,用于筛选 S 与普通玉米杂交后代中的单倍体.

(3)① G 和 H 杂交,获得 F_1 .②将所得 F_1 为母本与紫粒 S 杂交,根据籽粒颜色挑出单倍体.③将得到的单倍体进行秋水仙素处理使其染色体加倍以获得纯合子,选出具有优良性状的个体.

四、解决“杂交种 F_1 杂种优势不能留种”,指向“无性繁殖”

水稻的杂交种在生活力、抗逆性、产量等方面优于双亲,但由于杂种后代会发生性状分离,其杂种优势无法保持,因此需要每年制种用于生产.将“减数分裂”改为“有丝分裂”是实现无性繁殖的研究方向.

我国科研人员尝试利用CRISPR-Cas9基因编辑技术敲除杂种水稻的4个相关基因,实现了杂种的无融合生殖(图8).

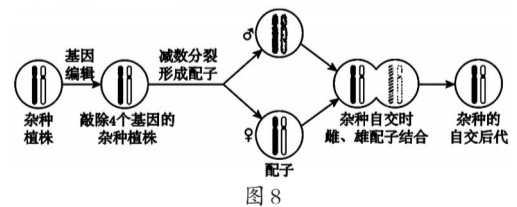


图8

【思考】

据图分析,科研人员利用基因编辑技术敲除的4个基因在实现无融合生殖过程中的作用.

【分析】基因编辑使减数分裂变成有丝分裂,受精后,父本来源的染色体消失,从而实现无性生殖,保留 F_1 杂种优势.

高三复习不是知识的简单重复,复习指向能力和素养发展,需要注重真实的生活情境和科研情境的知识再现.考生在复习中要不断打通书本世界与生活世界的界限,密切课堂教学与生活、社会的联系,注重应用知识解决实际问题的能力,提高复习的有效性.

(续完)