浅议“导函数为超越函数问题”的处理

北京市朝阳教育科学研究院教研员 王文英 北京市朝阳外国语学校教师 刘 嘉

利用导数研究函数的性质是高中数学的一个重要内容，一般的方法是通过导函数大于0解出函数的单调递增区间；通过导函数小于0解出函数的单调递减区间. 这里往往需要先令导函数为0，解出此方程的根. 当导函数为超越函数，也即导函数等于0这个方程难以求解时，运用这一方法会遇到一些障碍. 比如，求解$y=\mathrm{e}^x-\ln x$，其导数为超越函数，即$y'=\mathrm{e}^x-\frac{1}{x}(x>0)$. 由于$\mathrm{e}^x-\frac{1}{x}=0$的根难以知道，所以难以继续分析导函数何时为正、何时为负.

这类问题如何处理呢？下面探讨处理这类问题的常用方法.

一、回避难点，重新构造函数

许多题目需要构造一个函数，然后利用导数来研究这个函数的性质. 如果构造的函数求完导数后难以继续分析正负，可考虑重新构造，换一个函数试试.

【例1】设L：$y=x-1$，曲线C:$y=\frac{\ln x}{x}$，证明：除点$(1,0)$之外，曲线C在直线L的下方.

【分析】证明除点$(1,0)$外，曲线C在直线L的下方，等价于证明$\frac{\ln x}{x}<x-1$对任意$x>0$且$x\neq1$恒成立. 也就是需要证明$\frac{\ln x}{x}-x+1<0$对任意$x>0$且$x\neq1$恒成立. 如果令$g(x)=\frac{\ln x}{x}-x+1$，则求导得$g'(x)=\frac{1-\ln x-x^2}{x^2}$. 可通过$1-\ln x-x^2>0$解出$g(x)$的增区间；通过$1-\ln x-x^2<0$解出$g(x)$的减区间，从而完成本题证明. 但这两个不等式并不容易解. 如果放弃这个函数，重新构造一个函数，则有更好的处理方式. 注意，本题导函数之所以是超越函数，是因为“$\frac{\ln x}{x}$”这部分求导后依然含有“$\ln x$”，因此将这部分分离即可. 原题等价于证明：$\ln x-x^2+x<0$对任意$x>0$且$x\neq1$恒成立. 令$h(x)=\ln x-x^2+x$，求导得$h'(x)=\frac{1}{x}-2x+1=\frac{-2x^2+x+1}{x}$. 分子是个二次函数，处理起来就容易多了. 这便是处理超越型导数问题的第一个办法：回避难点，绕道而行. 下面是详细解答过程.

【解】设$h(x)=\ln x-x^2+x$，

求导得$h'(x)=\frac{1}{x}-2x+1=\frac{-2x^2+x+1}{x}$.

对分子进行因式分解，

得$h'(x)=\frac{-(2x+1)(x-1)}{x}.(x>0)$

令$h'(x)>0$，可得$x\in(0,1)$；令$h'(x)<0$，可得$x\in(1,+\infty)$.

所以$h(x)$在$(0,1)$单调递减；在$(1,+\infty)$单调递增.

所以当$x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$时，

$h(x)<h(1)=0$.

即对任意$x>0$且$x\neq1$，都有$\ln x-x^2+x<0$恒成立.

即对任意$x>0$且$x\neq1$，都有$\frac{\ln x}{x}<x-1$恒成立.

所以除$(1,0)$外，曲线C恒在直线L下方.

【例2】设函数$f(x)=\mathrm{e}^x\ln x+\frac{2\mathrm{e}^{x-1}}{x}$，

求证：$f(x)>1$.

【分析】如果直接去求$f(x)$的最小值，那么需要求其导数.

求导，$f'(x)=\mathrm{e}^x\ln x+\frac{\mathrm{e}^x}{x}+\frac{2\mathrm{e}^{x-1}x-2\mathrm{e}^{x-1}}{x^2}=\mathrm{e}^x\ln x+\frac{2\mathrm{e}^{x-1}x+\mathrm{e}^x-2\mathrm{e}^{x-1}}{x}$.导函数是个超越函数，很难直接解出何时导函数为正，何时导函数为负. 但此题并非必须得求$f(x)$的最小值，可以对待证不等式作合理变形，如例1那样，回避难点，绕道而行，重新构造函数来研究. 题中导函数之所以复杂，是因为“$\mathrm{e}^x\ln x$”的存在，因此考虑将这部分分离即可.

比如，要证$f(x)>1$，只需证明$x\ln x+\frac{2}{\mathrm{e}}>\frac{x}{\mathrm{e}^x}$. 能证明不等号左边的最小值，大于右边的最大值即可.

【解】设$h(x)=x\ln x+\frac{2}{\mathrm{e}}$，$g(x)=\frac{x}{\mathrm{e}^x}$.

则$h'(x)=\ln x+1$，$g'(x)=\frac{1-x}{\mathrm{e}^x}$.

显然$x\in\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$时，$h'(x)<0$，$h(x)$单调递减；$x\in\left(\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$时，$h'(x)>0$，$h(x)$单调递增；所以$h(x)\geqslant h\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=\frac{1}{\mathrm{e}}$.

同时$x\in(0,1)$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增；$x\in(1,+\infty)$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减；所以$g(x)\leq g(1)=\frac{1}{\mathrm{e}}$.

所以$h(x)\geq\frac{1}{\mathrm{e}}\geqslant g(x)$，又因为两个等号的去等条件不一致，所以最终$h(x)>g(x)$，整理后可得$f(x)>1$.

通过上面两个例子可以发现，在利用导数研究函数单调性和最值等问题时，如果导函数难以解决其何时正、何时负的问题，可以回避困难，重新构造函数去解决问题. 重新构造函数时，需要分析清楚原函数中是哪部分导致导函数复杂的，想办法把这部分分解掉.

但是，有些时候无法重新构造函数，就需要想办法去攻克那些超越的导函数. 下面介绍第二个方法.

二、二次求导，判断导函数范围

如果不能解出导函数何时为正、何时为负，可选择去解导函数的取值范围. 有以下三种情况：

1. 导函数的最大值小于0. 如果出现这种情况，就说明导函数是恒小于0的，从而原函数一定是单调递减的.

2. 导函数的最小值大于0. 如果出现这种情况，就说明导函数是恒大于0的，从而原函数一定是单调递增的.

3. 导函数最小值小于0，同时最大值大于0. 这时候比较麻烦. 如果导函数是连续函数，那么令导函数等于0必有解. 此时可以求出导函数等于0的根，然后结合导函数的单调性解决问题. 下面举例说明.

【例3】已知函数$f(x)=\mathrm{e}^x\cos x-x$，求函数$f(x)$在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的最大值和最小值.

【分析】求导得$f'(x)=\mathrm{e}^x\cos x-\mathrm{e}^x\sin x-1$. 很明显导函数是超越函数，很难解出其何时为正、何时为负. 同时，题目指明了要求$f(x)$的最值，因此也不能重新构造函数. 此时，可以考虑求导函数的范围. 这就需要求导函数的导函数. 设$g(x)=f'(x)$. 则$g'(x)=\mathrm{e}^x\cos x-\mathrm{e}^x\sin x-(\mathrm{e}^x\sin x+\mathrm{e}^x\cos x)$. 化简后得$g'(x)=-2\mathrm{e}^x\sin x$. 当$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$时，$g'(x)\leq0$，且只有$g'(0)=0$，所以$g(x)$单调递减. 因为$g(0)=0$，从而可知$g(x)\leq0$. 属于上文所分析的第一种情况. 之后便容易解决了.

【解】求导得$f'(x)=\mathrm{e}^x\cos x-\mathrm{e}^x\sin x-1$.

设$g(x)=f'(x)$. 则$g'(x)=-2\mathrm{e}^x\sin x$.

因为$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，所以$g'(x)\leq0$.

又只有$g'(0)=0$，所以$g(x)$单调递减. 因为$g(0)=0$，从而可知$g(x)\leq0$.

所以$f(x)$在$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$时单调递减. 从而当$x=0$时，$f(x)$有最大值1；

当$x=\frac{\pi}{2}$时，$f(x)$有最小值$-\frac{\pi}{2}$.

【例4】设函数$f(x)=x\mathrm{e}^{2-x}+\mathrm{e}x$，求$f(x)$的单调区间.

【分析】类似例3，求导得$f'(x)=\mathrm{e}^{2-x}(1-x+\mathrm{e}^{x-1})$. 这个导函数也是超越函数，难以直接解出其大于0和小于0的区间. 而原题又明确要求讨论$f(x)$的单调区间. 这同样意味着不能回避难点，重新构造函数，只能去求$f'(x)$的范围. 如果所得范围的最大值小于0或最小值大于0，那么此题就容易解决. 另外，注意到$\mathrm{e}^{2-x}>0$，因此求解$1-x+\mathrm{e}^{x-1}$的范围即可. 设$g(x)=1-x+\mathrm{e}^{x-1}$，求导得$g'(x)=-1+\mathrm{e}^{x-1}$. 易知$x<1$时，$g'(x)<0$；$x>1$时，$g'(x)>0$. 从而$g(x)$在$x=1$处取得最小值. 因为$g(1)=1>0$，所以这是上文分析的第二种情况. 按照相应方法处理即可.

【解】由$f'(x)=\mathrm{e}^{2-x}(1-x+\mathrm{e}^{x-1})$及$\mathrm{e}^{2-x}>0$可知，$f'(x)$与$1-x+\mathrm{e}^{x-1}$同号.

令$g(x)=1-x+\mathrm{e}^{x-1}$，则$g'(x)=\mathrm{e}^{x-1}-1$.

所以当$x<1$时，$g'(x)<0$；$x>1$时，$g'(x)>0$.

从而$g(x)$在$(-\infty,1)$内单调递减；在$(1,+\infty)$内单调递增.

所以$x=1$时，$g(x)$有最小值1.

当$x\in(-\infty,+\infty)$时，$g(x)>0$.

从而当$x\in(-\infty,+\infty)$时，$f'(x)>0$. 所以$f(x)$的单调递增区间为$(-\infty,+\infty)$.

通过上述两个例题可以发现，对导函数或导函数中影响正负的那部分进行二次求导，如果可以得出其最大值小于0或最小值大于0，问题就很好解决. 但是，也有可能得到的是导函数的最大值大于0，而最小值小于0，此时又如何处理呢？来看下面的例子.

【例5】设函数$g(x)=\frac{\mathrm{e}^x-ax-a}{x^2}(x>0)$，证明：当$a\in[0,1)$时，$g(x)$有最小值. 且该最小值在$\left(\frac{1}{2},\frac{\mathrm{e}^2}{4}\right]$内.

【分析】对函数$g(x)$求导，可得$g'(x)=\frac{x\mathrm{e}^x+ax-2\mathrm{e}^x+2a}{x^3}$. 注意到分母$x^3>0$，因此只需要知道分子的符号即可. 但分子明显为一超越函数，难以确定其何时为正、何时为负. 且本题只是要求$g(x)$的最小值，这就导致无法通过更换函数来研究. 因此只能去求分子$x\mathrm{e}^x+ax-2\mathrm{e}^x+2a$的范围.

【解】设$t(x)=x\mathrm{e}^x+ax-2\mathrm{e}^x+2a$，则$t'(x)=x\mathrm{e}^x+a-\mathrm{e}^x$，仍然是超越的，继续求导，得$t''(x)=x\mathrm{e}^x$. 因为题目条件明确给出$x>0$，所以$t''(x)>0$. 即$t'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增. 因为$t'(0)=a-1<0$，$t'(1)=a\geq0$，所以在$(0,1]$内，必存在$x_0$，使得$t'(x_0)=0$. 所以，当$x\in(0,x_0)$时，$t'(x)<0$；当$x\in(x_0,+\infty)$时，$t'(x)>0$. 所以可得$t(x)$在$(0,x_0)$内单调递减；$(x_0,+\infty)$内单调递增. 因为$t(0)=2a-2<0$，$t(2)=4a\geq0$，结合$t(x)$单调性便可得出当$x\in(0,x_0)$时，$t(x)<0$；当$x\in(x_0,+\infty)$时，必存在唯一的$x_1\in(0,2]$，使得$t(x_1)=0$. 因此可知$t(x)$在$(0,x_1)$内值为负；在$(x_1,+\infty)$内，值为正. 从而$g(x)$在$(0,x_1)$内单调递减；在$(x_1,+\infty)$内单调递增. 所以$g(x)$必存在最小值. 此值为$g(x_1)=\frac{\mathrm{e}^{x_1}-ax_1-a}{x_1^2}$. 虽然不知道$x_1$的值，但知道$t(x_1)=0$，即$x_1\mathrm{e}^{x_1}+ax_1-2\mathrm{e}^{x_1}+2a=0$. 由此式可解得$a=\frac{2\mathrm{e}^{x_1}-x_1\mathrm{e}^{x_1}}{x_1+2}$，代入$g(x_1)$，得
$$g(x_1)=\frac{\mathrm{e}^{x_1}-\frac{2\mathrm{e}^{x_1}-x_1\mathrm{e}^{x_1}}{x_1+2}x_1-\frac{2\mathrm{e}^{x_1}-x_1\mathrm{e}^{x_1}}{x_1+2}}{x_1^2}.$$
化简，得$g(x_1)=\frac{\mathrm{e}^{x_1}}{x_1+2}$. 之后再设$h(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{x+2}$，求导得$h'(x)=\frac{(x+1)\mathrm{e}^x}{(x+2)^2}>0$，所以$h(x)$在$(0,2]$内单调递增. 所以$h(0)<h(x)\leq h(2)$，即$\frac{1}{2}<g(x_1)\leq\frac{\mathrm{e}^2}{4}$. 问题得到解决.

通过上述分析可以发现，二次求导，判断导函数范围的第三种情况比较复杂. 但可以类似上述解答过程，设出导数等于的根，比如设为x_0，然后结合导数的单调性分析导数何时正、何时负；进而确定原函数的单调区间. 但需要说明的是，由此求出的原函数的极值是带有x_0的式子. 虽然并不知道x_0的值，但可以根据当$x=x_0$时导函数值为0这个条件，对求得极值进行化简，从而最终解决问题.

以上就是导函数是超越函数无法直接解出其何时为正、何时为负时的一些处理方法，希望对考生有所帮助.

责编/刘海燕 版式/马婷婷 热线/82837130 邮箱/liuhy@bjeea.cn