

初三数学专题指导

“对称性”在综合题中的应用

北京市第一零一中学教师 邱 静

对称有着视觉的美感,通过对称性,可将图形“简化”,达到事半功倍的目的,不仅能节省解题时间,而且能精简并提高思维.

【例1】在平面直角坐标系xOy中,已知A(3,0)、B(1,2),直线l围绕△OAB的顶点A旋转,与y轴相交于点P.探究解决下列问题:

(1)在图1中求△OAB的面积.

(2)如图1所示,当直线l旋转到与边OB相交时,试确定点P的位置,使顶点O、B到直线l的距离之和最大,并简要说明理由.

(3)当直线l旋转到与y轴的负半轴相交时,在图2中试确定点P的位置,使顶点O、B到直线l的距离之和最大,画出图形并求出此时P点的坐标.(点P位置的确定只需作出图形,不用证明)



图1

分析:对于(2)来说,难点在于两点:一是如何读懂(1)的意思,也就是将图形语言转化为文字语言;二是灵活运用对称性(这里是中心对称),将线段进行转换,构造与(1)类似的图形.

解:(1)过B点作BE⊥OA,垂足为E.∵B(1,2),∴BE=2,∴A(3,0),∴OA=3,∴S_{△OAB}= $\frac{1}{2}$ OA·BE= $\frac{1}{2}$ ×3×2=3.

(2)过A点作直线l⊥OB于点F,l与y轴的交点即为所确定的P点位置,理由如下:如图3所示,过点O作OD⊥l于D,过点B作BC⊥l于C.∴S_{△OAB}= $\frac{1}{2}$ FA·OD+ $\frac{1}{2}$ FA·BC= $\frac{1}{2}$ FA(OD+BC)=3为定值.要使点O、B到直线l的距离之和最大,即OD+BC最大,只要使FA最小即可,∴过A点作直线l⊥OB于点F,此时FA即为最小值.∴l与y轴的交点即为所确定的P点位置.

(3)如图4所示,延长BA到G点,使BA=AG,联结OG,则S_{△OAG}=S_{△OAB}.过点A作直线l⊥OG于点F,与y轴的交点即为所确定的P点,过点B作BE⊥OA于点E.∵B(1,2),A(3,0),∴EB=EA=2.过点G作GH⊥x轴于点H,∴△ABE≌△AGH(AAS).∴AH=2,GH=2,∴OH=5,∴tan∠HOG= $\frac{2}{5}$,又∵直线l⊥OG于点F.∴∠OPA=∠HOG,∴tan∠OPA=tan∠HOG= $\frac{2}{5}$,∴ $\frac{OA}{OP}=\frac{2}{5}$,∴ $\frac{3}{OP}=\frac{2}{5}$,∴OP= $\frac{15}{2}$,∴P(0, $\frac{15}{2}$).

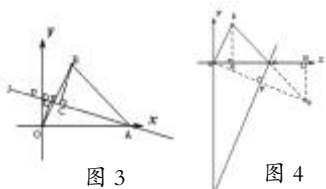


图3

图4

【例2】在平面直角坐标系xOy中,⊙C的半径为r,P是与圆心C不重合的点,点P关于⊙C的限距点的定义如下:若P'为直线PC与⊙C的一个交点,满足r≤PP'≤2r,则称P'为点P关于⊙C的限距点.图5为点P及其关于⊙C的限距点P'的示意图.

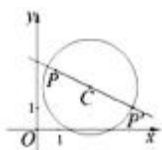


图5

(1)当⊙O的半径为1时.

①分别判断点M(3,4)、N($\frac{1}{2}$,0),

T(1, $\sqrt{2}$)关于⊙O的限距点是否存在,若存在,求其坐标.

②点D的坐标为(2,0),DE,DF分别切⊙O于点E,点F,点P在△DEF的边上.若点P关于⊙O的限距点P'存在,求点P'的横坐标的取值范围.

(2)保持(1)中D、E、F三点不变,点P在△DEF的边上沿E→F→D→E的方向运动,⊙C的圆心C的坐标为(1,0),半径为r.请从下面两个问题中任选一个作答.

温馨提示:答对问题1得2分,答对问题2得1分,两题均答不重复计分.

问题1:若点P关于⊙C的限距点存在,且随点P的运动所形成的路径长为πr,则r的最小值为_____.

问题2:若点P关于⊙C的限距点不存在,则r的取值范围为_____.

分析:本题是自主学习的试题.在平面直角坐标系的背景下,新定义给出的是“限距点”的概念,第(1)题①根据概念判断限距点,继而根据限距点求点的坐标;②根据阴影点的概念在变化过程中确定点的变化范围.第(2)题对概念进行应用,是新概念与所学知识的结合.本题充分考查抽象概括、分类讨论、数形结合的重要思想方法,对考生的严谨性、深刻性与灵活性等要求较高.题目新颖,具有开放性,解答方式更利于考生得分.

最后一问的解决是“扩大化”的对称性,又不同于以往的轴对称性、中心对称性等.考生要仔细体会其中的意味,挖掘几何图形的特征,有意识地运用对称性简化问题.

解:(1)①点M,点T关于⊙O的限距点不存在;点N关于⊙O的限距点存在,坐标为(1,0).

②∵点D的坐标为(2,0),⊙O半径为1,DE,DF分别切⊙O于点E,点F,∴切点坐标为($\frac{1}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$),($\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$);

如图6所示,不妨设点E的坐标为($\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$),点F的坐标为($\frac{1}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$),EO,FO的延长线分别交⊙O于点E',F',则E'(- $\frac{1}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$),F'(- $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$).

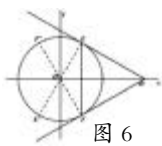


图6

设点P关于⊙O的限距点的横坐标为x.

I.当点P在线段EF上时,直线PO与E'F'的交点满足1≤PP'≤2,故点P关于⊙O的限距点存在,其横坐标x满足-1≤x≤- $\frac{1}{2}$.

II.当点P在线段DE,DF(不包括端

点)上时,直线PO与⊙O的交点P'满足0<PP'<1或2<PP'<3,故点P关于⊙O的限距点不存在.

III.当点P与点D重合时,直线PO与⊙O的交点P'(1,0)满足PP'=1,故点P关于⊙O的限距点存在,其横坐标x=1.

综上所述,点P关于⊙O的限距点的横坐标x的范围为-1≤x≤- $\frac{1}{2}$ 或x=1.

(2)按照由易到难的顺序,先解决问题2,将所求的问题“若点P关于⊙C的限距点P'不存在,求r的取值范围”转化为“求半径的范围,使得线段DE上所有点既不在圆C内,也不在以点C为圆心,2倍r为半径和3倍r为半径的圆形成的圆环中”.

①情况1:线段DE全部在3倍半径圆外.

如图7,作CH⊥DE于H,则CH>3r,又因为CH= $\frac{1}{2}$ CD= $\frac{1}{2}$,可得r< $\frac{1}{6}$.

②情况2:线段DE全部在圆C和2倍半径圆形成的圆环内.

如图8,作CH⊥DE于H,则CH>r,又因为CD=2r,CH= $\frac{1}{2}$ CD= $\frac{1}{2}$,可得r< $\frac{1}{2}$,且r> $\frac{1}{2}$,矛盾.

综合两种情况,r的范围为r< $\frac{1}{6}$.

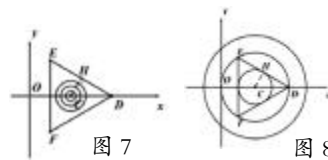


图7

图8

对于问题2,将所求问题转化为“让半径r从0开始不断增大,求第一次使得P'的运动路径长为πr时的r,即为所求的r的最小值”,再转化为“求使得图9中∠P₁CP₂=60°的r的值”.

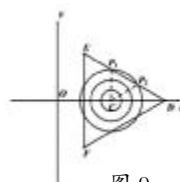


图9

由对称性可知,△P₁CP₂也是等边三角形,∴∠CP₁P₂=60°=∠E,∴CP₁∥EF,∴∠P₁CD=90°,∴CP₁=CDtan∠EDC= $\frac{\sqrt{3}}{3}$,∴CP₁=3r,∴此时有r= $\frac{\sqrt{3}}{9}$,即r的最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{9}$.

所以,问题1答案为 $\frac{\sqrt{3}}{9}$,问题2答案为0<r< $\frac{1}{6}$.

数学



初三生优秀作文及点评

细品重逢

北京市十一学校学生 晋瑞格

与最亲密的人重逢许是一种奇妙的感觉,熟悉中夹杂着一丝陌生,亲密中带着一丝生分.而当细细品味这重逢,又带着一丝心酸与触动.

在我四岁的时候,父母工作忙,就把我送回老家四川,交由外公外婆抚养了一年.八年过去了,我与外婆虽不是毫无联系,但见面却是少之又少.终于,前段时间,我又一次回到那里,与外公外婆共度了两个星期.

到家的第一顿饭,丰盛又熟悉,都是我最爱吃的.外婆一边与我说着话,一边帮我盛饭.我一看,碗里只有少得可怜的几粒米,就问道:“怎么只有这么点啊?”外婆不假思索地回答:“你可别着急,我还不知道你,每次半碗饭都吃不下.”

“啊?”我可是公认的能吃,一顿至少两碗饭.我笑着说:“那都是八年前的事了,我现在很能吃的.”

外婆愣了一下:“哦对,都八年了.”她顿了顿,拿起碗说,“我再去给你盛点.”恍惚间,我看着外婆些微驼背的身躯和蹒跚的脚步,竟感到一丝落寞与沧桑.

又一天下午,我正躺在沙发上看电视,外婆办事回家,向我扔来一大袋子豆腐干.

“买这个干什么啊?”外婆笑道:“干什么?以前你每天路过超市都求着我买——”外婆突然停下了,嘴角的笑意刹那间僵住了.

“哦对,那都是很久以前的事了……没事,你要是不愿意吃就放在那里吧.”

我心里突然疼了一下,外婆的记性越来越差,常常不记得自己把东西放在哪儿了,可是八年前的每个细节她都记得.我挤出一丝笑:“我吃吃,我超爱吃的!您买的都是我喜欢的口味!”外婆一下子笑开了,眼睛眯成一条缝,皱纹也更加明显:“好好好!敞开吃,不够了我再去买.”

老人终究敌不过时间,她的头发又变少了,皱纹又多了,不变的还是那笑意.时隔多年与重要的人重逢,本以为会是件开心的事.细品起来,竟有一丝心酸与无奈.时间总是走得那么快,从来不开回头,而我们却追不上它的脚步.

—— 点评 ——

重逢,意味着开心、兴奋.而本文作者却不是,小小年纪,便从中品出人生的酸涩,读来触人心弦,动人情思.

作者选取两个生活场景:盛饭时的尴尬,有关豆腐干的对话.外婆一口四川方言的亲切与热情,作者的乖巧、贴心,浓厚的生活气息在字里行间流露,不得不感叹祖孙两人离别得太久……个中滋味,值得慢慢品读.

(指导教师:董卓力)