

在点切线与过点切线问题

北京市和平街第一中学教师 王云霞 赵小娟

在导数背景下,以函数为载体的切线问题通常有两类,一类是求在某点处的曲线的切线,另一类是求过某点的曲线的切线.第一类中的点显然是切点,切线是唯一的.第二类中的点可分为两种情形:若该点不在曲线上,那当然不是切点,切线可能不唯一;若该点在曲线上,那它可以是切点,也可以是切线经过的一点,切线可能不唯一.为叙述方便,把上述两种情形简称为“在点”与“过点”.

考生解题时往往存在以下三方面问题:

1.混淆“在某点处的切线”与“过某点的切线”,一律按“在某点处切线”处理;

2.在“过某点的切线”中,若该点恰在曲线上,就以为该点就是切点;

3.书写格式不统一,一类题一个方法,且不严谨.

对上述情形,考生要采取哪些办法,才能既注意二者的区别,又能轻松应对呢?

一、从图像入手,直观感知

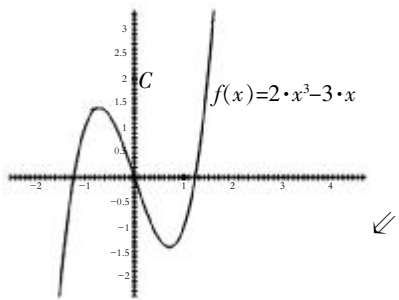
例.已知函数 $f(x)=2x^3-3x$.

(1)求 $f(x)$ 在区间 $[-2,1]$ 上的最大值;

(2)若过点 $P(1,t)$ 存在 3 条直线与曲线 $y=f(x)$ 相切,求 t 的取值范围;

(3)问过点 $A(-1,2)$, $B(2,10)$, $C(0,2)$ 分别存在几条直线与曲线 $y=f(x)$ 相切?(只需写出结论)

【分析】借助导数可知函数的单调性,再根据函数奇偶性、最值等性质,便能较准确地作出函数图像,如图所示:



由(2)的计算结果可知,当过点 $P(1,t)$ 存在 3 条直线与曲线 $y=f(x)$ 相切时, t 的取值范围是 $(-3,-1)$.

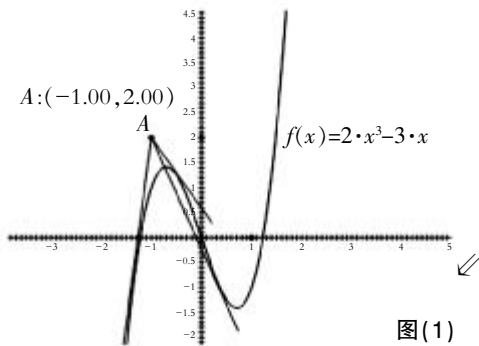
有了函数图像及(2)的范围,回答(3)中的切线条数就容易了.

可见,(3)中均为“过点”问题,考生对这点要清楚.

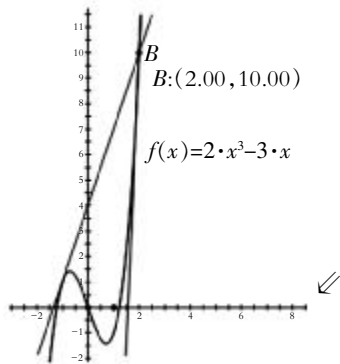
由于 $A(-1,2)$ 关于原点的对称点为 $(1,-2)$,且 $-2 \in (-3,-1)$,所以过 $A(-1,2)$ 点必有 3 条切线.如图(1)所示.

易知 $B(2,10)$ 恰在曲线上,所以 B 为切点是当然的一种情形.另外,结合图像特征,可发现还有一条切线,此时点 B 只是切线经过的一点.如图(2)所示.

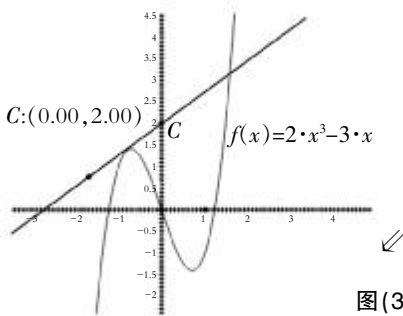
根据点 $C(0,2)$ 的位置,过 C 只可作出一条切线.如图(3)所示.



图(1)



图(2)



图(3)

二、用计算呈现,严谨规范

问题 1: 已知曲线 $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 4$, 求曲线在 $x=2$ 处的切线方程.

【分析】显然,该题属于“在点”问题,是常规题.求出导数后,直接代点求斜率,进而用点斜式求直线方程.可以知道,切线是唯一的.

问题 2: 已知曲线 $f(x)=x^2-2x-3$, 求曲线过点 $(0,-4)$ 的切线方程.

【分析】该题属于“过点”问题,且点不在曲线上.类比问题 1, 可发现切线问题切点是关键,所以要先设切点.具体步骤如下:

解: 设切点 (x_0, y_0) , $f'(x)=2x-2$,

则 $f'(x_0)=2x_0-2$.

切线方程为 $y-y_0=(2x_0-2)(x-x_0)$.

又 $y_0=x_0^2-2x_0-3$,

且直线过 $(0,-4)$ 点,

代入上式,得 $-4-(x_0^2-2x_0-3)=(2x_0-2)(-x_0)$,

解得 $x_0=\pm 1$.

当 $x_0=1$ 时,切线方程为 $y=-4$;

当 $x_0=-1$ 时,切线方程为 $y=-4x-4$.

【评析】“过点”问题与“在点”问题没有本质区别,其解题形式可以统一,以避免出现解题格式上的混乱.

问题 3: 求过点 $(1,-1)$ 与曲线 $f(x)=x^3-2x$ 相切的直线方程.

【分析】该题中的点在曲线上,但依然属于“过点”问题,与问题 2 类型相同.所以也要先设切点.具体步骤如下:

解: 设切点 (x_0, y_0) , $f'(x)=3x^2-2$,

则 $f'(x_0)=3x_0^2-2$.

切线方程为 $y-y_0=(3x_0^2-2)(x-x_0)$.

又 $y_0=x_0^3-2x_0$,

且直线过 $(1,-1)$ 点,

代入上式,得 $-1-(x_0^3-2x_0)=(3x_0^2-2)(1-x_0)$,

解得 $x_0=1$ 或 $x_0=\frac{1}{2}$.

当 $x_0=1$ 时,切线方程为 $x-y-2=0$;

当 $x_0=\frac{1}{2}$ 时,切线方程为 $3x+4y+1=0$.

【评析】对于“过点,点在曲线上”的情形,考生易陷入的误区是以为该点就是切点,从而出现漏解.其实无论是前面的图像展示,还是本题的解答,都揭示了事实的真相.

以上是从形与数两个角度认识和理解“在点”与“过点”的切线问题,当切线形象跃然纸上时,切线问题就不是“问题”了.

三、总结

知识总结:

切线 $\begin{cases} \text{在点(唯一)} \\ \text{过点} \begin{cases} \text{点不在曲线上(可能不唯一)} \\ \text{点在曲线上(可能不唯一)} \end{cases} \end{cases}$

方法总结:

1. 求曲线在某点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线方程的步骤:

(1) 求切线斜率: $k=f'(x_0)$;

(2) 利用点斜式列方程 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.

2. 求曲线 $y=f(x)$ 过某点 (a,b) 的切线方程的步骤:

(1) 设切点 $(x_0, f(x_0))$;

(2) 求切线斜率: $k=f'(x_0)$;

(3) 利用点斜式列方程 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$;

(4) 代入已知点求 x_0 , 求出切线方程.

最后再次强调: 只要是“过点”问题,无论点是否在曲线上,考生都可用统一的方法,简称:过点设切点.

《四世同堂》中钱先生说“一朵花,长在树上,才有它的美丽”。这句话揭示了生活中很多现象背后的道理。

请以“花儿为什么这样美丽”为题,写一篇议论文。

要求:观点明确,论据充分,论证合理。



花儿为什么这样美丽

北大附中高三毕业生 李和松

每到夏天,看着公园里、院子里盛开的鲜花,不禁会叹服它们的美丽。花儿为什么这样美丽?在我看来,花儿是因为树的依托、保护、吸取树的营养才会这样美丽。

花开放之前,树的根拼命地吸取土壤中的养料和水分,茎也奋力吸取土壤中的养料和水分,并奋力地向上长、向上长,想要长得更高,以便让叶接受最好的阳光,为花的绽放积蓄能量。我想,花是树的未来,树拼命地保护、养育花,是想等到一天,花结出果实延续自己的生命。由此看来,花是该感谢树、报答树的。

我们是花,父母就是树。父母拼命工作就是为了给我们创造最好的生活条件。当我们遇到威胁时,他们会张开双手,撑起一片绿荫;当我们渴望成功时,他们伸开长长的枝杈,托举起我们,让我们面向太阳,沐浴阳光。可是,树终究会老,而花应该懂得珍惜在成为果实后与树最后的陪伴。

人民是花,国家就是树。这棵树可能是饱经风雨的千年古树,它的花和果永远无法数清。花是树的花,人民是国家的人民。树以自己的营养哺育、保护着花,花的美丽是树的付出。树要是倒了,花也就散落一地;国家要是亡了,人民就饱受痛苦。我们要珍惜国家带给我们的所有,并努力回报国家。

人类是花,地球就是树。树就是树,一定会保护自己的花,而人类有时是不合格的花,会反过来危害养育自己的树。比如我们污染环境、过度排放、过度开采,导致海啸、地震、温室效应来了。这时的树也会讨厌伤害自己的花,但仍会忍受、袒护自己的花,原谅花的无知。只是它再也承受不住时会生病,打喷嚏时无意间会把花摇落。如今人们能做的,就是及时保护地球这棵被自己伤害致病的树。

花有了树的保护、依托和滋养才这样美丽。也只有懂得感恩、回报自己的树,花的美丽才能更鲜艳、更长久。



此文突出优点有两个:一是审题准确,观点鲜明。作者能根据题干所给材料,准确地提炼观点“花儿是因为树的依托、保护、吸取树的营养才会这样美丽”。二是思路清晰,层进结构。文章运用首括句法,提纲挈领地提出三个分论点,然后联系实际逐一分析,最后回到观点,呼应开头。另外文章传递了满满的正能量,让人感动。

(刘丽燕)