首都教育高质量发展·中招

数学

# 活用核心定理 破解几何综合题

北京师范大学三帆中学朝阳学校 胡潆予

初中学考几何综合题考查几何概念、定理等多方面知识，对考生的知识储备、空间想象、逻辑推理及综合应用能力要求较高。笔者结合往年初中学考试题及其变式题，为考生梳理了同类题型的核心知识点及解题策略。

## 明晰核心定理 掌握解题用法

几何综合题的核心命题特点是“多知识点融合、多定理交叉应用”。因此，考生能否精准调用定理解决边角关系转化、图形构造等问题，直接决定其解题效率与正确率。下面，笔者梳理了几何综合题相关核心定理。

| 几何知识模块 | 核心内容 | 应用场景 |
|---|---|---|
| 全等三角形 | SSS(边边边)、SAS(边角边)、ASA(角边角)、AAS(角角边)、HL(斜边—直角边,仅适用于直角三角形) | 证明线段相等或角相等，推导线段垂直或平行关系 |
| 相似三角形 | 三边成比例的两个三角形相似，两边成比例且夹角相等的两个三角形相似，两角分别相等的两个三角形相似 | 处理线段比例、倍数关系 |
| 特殊三角形 | 等腰三角形“三线合一”，直角三角形“斜边中线等于斜边一半”“勾股定理及逆定理” | 构造全等或相似三角形的重要突破口 |
| 特殊四边形 | 平行四边形、矩形、菱形、正方形的性质及判定定理 | 常与三角形全等或相似结合，推导线段关系 |
| 旋转与中心对称 | 旋转前、后图形全等，中心对称的两个图形全等 | 构造全等三角形 |

## 典型例题精讲 解锁解题思路

**【例1】**(2025北京·初中学考) 27.在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$\angle ABC=a$，点 $D$ 在射线 $BC$ 上，连接 $AD$，将线段 $AD$ 绕点 $A$ 逆时针旋转 $180°-2a$ 得到线段 $AE$(点 $E$ 不在直线 $AB$ 上)，过点 $E$ 作 $EF \parallel AB$，交直线 $BC$ 于点 $F$.

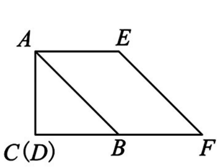


图1

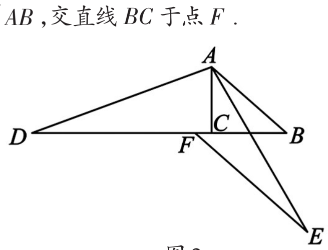


图2

(1)如图1，$a=45°$ 点 $D$ 与点 $C$ 重合，求证：$BF=AC$；

(2)如图2，点 $D$，$F$ 都在 $BC$ 的延长线上，用等式表示 $DF$ 与 $BC$ 的数量关系，并证明.

**【思路点拨】**本题考查旋转的性质、全等三角形的性质与判定、等腰三角形的性质、三角形内角和定理、平行四边形的性质与判定等知识点。考生熟练掌握且灵活运用旋转的性质是解题的关键。

(1)考生可根据 $a=45°$，得出 $\angle BAC=\angle ABC=45°$，根据旋转的性质得出 $AE=AD=AC$，$\angle EAD=90°$，进一步得出 $\angle EAB=90°-\angle BAC=45°$，进而证明四边形 $ABFE$ 是平行四边形，再根据平行四边形的性质得出 $BF=AE$，$BF=AC$，即可完成证明。

(2)根据题意，$AE$ 由 $AD$ 旋转得到，故 $AE=AD$，$\triangle ADE$ 为等腰三角形。由此考生可联想到“共顶点等腰三角形全等”解题模型. 考生可在 $DB$ 上取一点 $G$，使 $CG=CB$，再根据“三线合一”性质，使 $AG=AB$，证明 $\triangle DAG \cong \triangle EAB$，得出 $DG=BE$，$\angle AGD=\angle ABE=180°-\angle AGC=180°-a$；进而根据三角形内角和定理得出 $\angle FBE=180°-2a$。结合平行线的性质，考生可得出 $\angle BFE=\angle ABF=a$，进而得出 $\angle BEF=a$；根据“等角对等边”可得 $BE=BF$，则 $DG=BF$；根据“三线合一”性质可得 $GC=BC$，进而得出 $DF=BD-BF=BD-DG=BG=2BC$，即可证得目标结论。

**解：**(1)$\because \angle ACB=90°$，$\angle ABC=45°$，

$\therefore \angle BAC=\angle ABC=45°$，

$\because$ 线段 $AD$ 绕点 $A$ 逆时针旋转 $180°-2\times45°=90°$ 得到线段 $AE$，点 $D$ 与点 $C$ 重合，

$\therefore AE=AD=AC$，$\angle EAB=90°-\angle BAC=45°$，

$\therefore \angle EAB=\angle ABC$，

$\therefore BC \parallel AE$，

$\because EF \parallel AB$，

$\therefore$ 四边形 $ABEF$ 是平行四边形，

$\therefore BF=AE$，

$\therefore BF=AC$.

(2)证明：在 $CD$ 上取一点 $G$，使得 $CG=CB$，连接 $AG$、$BE$，如图3所示.

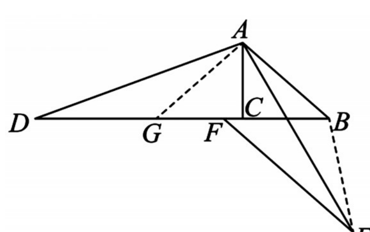


图3

$\because \angle ACB=90°$，

$\therefore AG=AB$，

$\therefore \angle AGB=\angle ABG=a$，

$\therefore BAG=180°-2a$，

$\because$ 将线段 $AD$ 绕点 $A$ 逆时针旋转 $180°-2a$ 得到线段 $AE$，

$\therefore DA=EA$，

$\therefore \angle DAE=\angle GAB=180°-2a$，

$\therefore \angle DAG=\angle EAB$，

$\therefore \triangle DAG \cong \triangle EAB(SAS)$，

$\therefore DG=BE$，$\angle AGD=\angle ABE=180°-\angle AGC=180°-a$，

又 $\because \angle ABC=a$，

$\therefore \angle FBE=\angle ABE-\angle ABC=180°-a-a=180°-2a$，

$\because EF \parallel AB$，

$\therefore \angle BFE=\angle ABF=a$，

$\therefore \angle BEF=180°-\angle FBE-\angle BFE=a$，

$\therefore BE=BF$，

$\therefore DG=BF$，

$\because AG=AB$，$AC \perp BC$，

$\therefore GC=BC$，

$\therefore DF=BD-BF=BD-DG=BG=2BC$.

**【思路梳理】**考生解答此类题目时，要先梳理解题思路再逐步推导。面对几何综合题的复杂图形，考生可通过引入旋转变换、添加平行线构建相似或全等关系，进而简化解题过程。

**【例2】**(变式训练) 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$\angle BAC=a(90°<a<180°)$，点 $E$ 为 $BC$ 的中点，$EF \perp AB$ 于点 $F$，将线段 $AB$ 绕点 $B$ 逆时针旋转 $(180°-a)$ 得到线段 $DB$，连接 $DC$.

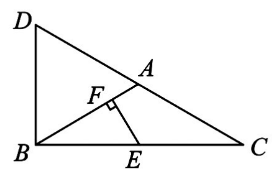


图4

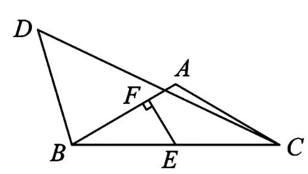


图5

(1)如图4，当 $a=120°$ 时，若 $AB=4$，求 $EF$ 的长.

(2)如图5，用等式表示线段 $AB$、$CD$、$EF$ 之间的数量关系，并证明.

**【分析】**(1)根据题意，$AB=AC$，所以 $\triangle ABC$ 为等腰三角形。因为点 $E$ 为 $BC$ 的中点，考生可结合等腰三角形“三线合一”的性质连接 $AE$；再根据等腰三角形的性质与三角形内角和定理得出 $AE \perp BC$，$\angle ABC=\angle C=30°$，借助含30°角的直角三角形的性质求出 $AE=2$，通过勾股定理求出 $BE=2\sqrt{3}$，最后利用含30°角的直角三角形的性质求解。

(2)根据题意，考生可由旋转条件及 $AB=AC$，得出 $DB=AB=AC$；利用这些相等线段与角度建立 $CD$、$AB$、$EF$ 的关联，构造全等三角形。

首先，考生要以 $D$ 为端点，$DB$ 为边，在 $DB$ 的右侧作 $\angle MDB=\angle CAB=a$，且 $DM=AB$，连接 $BM$、$AM$、$CM$，延长 $BA$ 交 $CM$ 于 $N$，再证明 $\triangle BDM \cong BAM$，$\triangle ABM \cong ABC$，从而得出 $AM=DM=DB=AB=AC$，$\angle DMB=\angle AMB=\angle ABC=\angle C=\angle DBM=\angle ABM=\frac{180°-a}{2}$，$BM=BC$。

根据等边对等角和三角形内角和定理，考生可得出 $\angle BMC=\angle BCM=\frac{a}{2}$，进而求出 $\angle DMC=90°$，由勾股定理得出 $DC^2=DM^2+MC^2$，可证 $\angle BEF=\angle BCM=\frac{a}{2}$，$EF \parallel MC$，进而得出 $BA \perp MC$。

根据等腰三角形“三线合一”性质，考生可得出 $MC=2CN$。

最后证明 $\triangle BEF \sim \triangle BCN$，$CN=2EF$，$MC=4EF$，$DC^2=DM^2+MC^2$，$DM=AB$，故 $DC^2=AB^2+16EF^2$，即可推导出目标结论。

**【思路梳理】**本题考查旋转的性质、等腰三角形的性质、全等三角形的判定与性质、勾股定理、相似三角形的判定与性质、含30°角的直角三角形的性质等知识点。考生解答这道题的关键在于明确题意、添加合适辅助线，进而构造等腰三角形与全等三角形。该题与初中学考试题类似，考生可发现其核心图形均为等腰三角形，因此考生要熟记并灵活运用等腰三角形的性质。此外，考生在添加辅助线时，要联想常见几何模型，大胆尝试构造全等三角形。

责编/苗露 版式/马婷婷 热线/59102870 邮箱/kaoshibao@bjeea.cn