数学

二次函数之抛物线和直线组合问题

北京一零一中学高级教师 邱 静

二次函数综合压轴题是以函数为主线，结合方程、不等式等相关代数知识，运用几何图形性质的综合性试题。通常，第一问正确率在60%以上；第二问有些难度，建议同学们进行专项训练，总结归纳对应的解题方法和技巧。

本次专题，笔者汇总“直线和抛物线的组合问题”，为大家备考助力。

【例题1】如图1，抛物线 $y=x^2-4x+3$ 与 x 轴相交于 A,B（点 A 在点 B 左侧），与 y 轴交于 C.

（1）（2017年北京）垂直于 y 轴的直线 l 与抛物线相交于点 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，与直线 BC 交于点 $N(x_3,y_3)$，若 $x_1<x_2<x_3$，求 $x_1+x_2+x_3$ 的取值范围；

（2）如图2，直线 $x=m$ 分别交抛物线、直线于 P、Z，如果 $y_P<y_Z$，求 m 的范围；

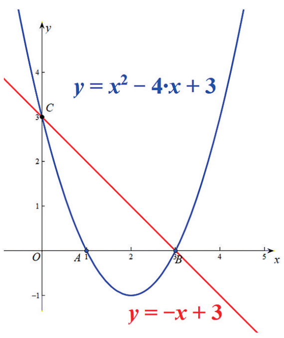

图1

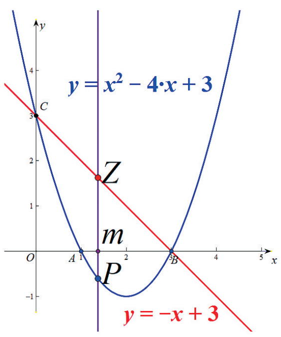

图2

（3）（2021年海淀期末第26题改编）如图2，直线 $x=m$ 分别交抛物线、直线于 P、Z，是否存在 m，使得 P、Z 都在 x 轴的下方？并说明理由；

（4）（2021年海淀期末第26题改编）如图2，直线 $x=m$ 分别交抛物线、直线于 P、Z，求使 $y_Py_Z\leqslant0$ 成立的 m 的取值范围；

（5）（常见类型题）如图3，求抛物线与直线围成的区域内（不含边界）的整点的个数.

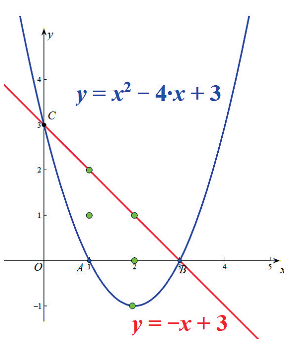

图3

【解】（1）由 $y=x^2-4x+3$ 得到：$y=(x-3)(x-1)$，$\therefore A(1,0)$，$B(3,0)$，$C(0,3)$；设直线 BC 为 $y=kx+3$，$\therefore 3k+3=0, k=-1$，$\therefore$ 直线 BC 为 $y=-x+3$；如图4；由直线和抛物线的交点 $B(3,0)$，$C(0,3)$ 可得，直线 $y=3$，$y=0$ 将平面分割成3个区域，只有当垂直于 y 轴的直线 l 在 $y=0$ 的下方，且顶点上方时，才能使得交点从左到右的位置是 P,Q,N，即 $x_1<x_2<x_3$.

如图5，由 $y=x^2-4x+3$ 得到：$y=(x-2)^2-1$，抛物线的对称轴是 $x=2$，顶点坐标是 $(2,-1)$；$\because y_1=y_2$，$\therefore x_1+x_2=4$；对于 $y=-x+3$，当 $y=0$ 时，$x_3=3$；当 $y=-1$ 时，$x_3=4$；$\therefore$ 当 $-1<y<0$ 时，$3<x_3<4$；$\therefore 7<x_1+x_2+x_3<8$.

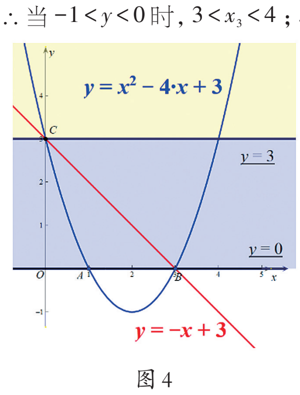

图4

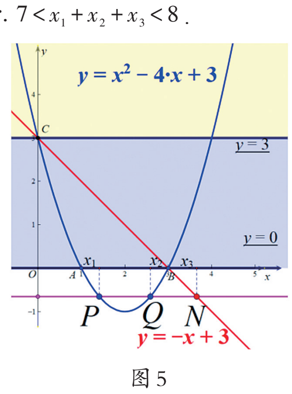

图5

（2）如图6，过交点 B,C 垂直于 x 轴的直线 $x=0$，$x=3$ 将平面分为三部分，只有当 $0<x<3$ 时，抛物线才能低于直线；$\therefore$ 直线 $x=m$ 分别交抛物线和直线为 P,Z，如果 $y_P<y_Z$，那么 $0<m<3$.

（3）直线 $x=m$ 分别交抛物线和直线于 P,Z.

方法一：（几何方法），如图7；

当 $0<x<3$ 时，直线和抛物线分别在 x 轴的上方和下方；

当 $x>3$ 时，直线和抛物线分别在 x 轴的下方和上方；

当 $x<1$ 时，直线和抛物线都在 x 轴的上方；

$\therefore$ 不存在这样的区域，使得直线和抛物线都在 x 轴的下方，

对应的“代数表示”为：不存在 m，使得 P,Z 都在 x 轴的下方.

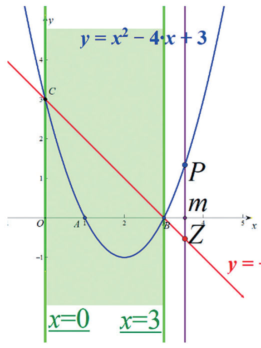

图6

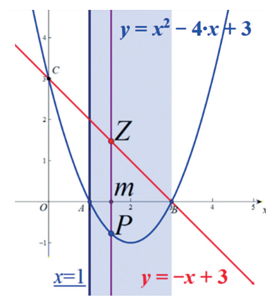

图7

方法二：（代数方法）：若 P 在 x 轴的下方，则对应的自变量范围是 $1<x<3$；

若 Z 在 x 轴的下方，则对应的自变量范围是 $x>3$；

如果使得 P,Z 都在 x 轴的下方，那么对应的两个自变量范围必须有“公共部分”，

这与不等式组 $\begin{cases}1<x<3\\x>3\end{cases}$ 无解矛盾，所以不存在 m，使得 P,Z 都在 x 轴的下方.

（4）**方法一：**当 $y=x^2-4x+3$，$\therefore x=1$，$x=3$；当 $y=-x+3=0$，$\therefore x=3$；

由题意设 $P(m,y_P)$，$Z(m,y_Z)$，经过列表（如下）分类讨论 $y_P\cdot y_Z$ 的值，得到 $m\geqslant1$；

	$m<1$	$m=1$	$1<m<3$	$m=3$	$m>3$
y_P	+	0	−	0	+
y_Z	+	+	+	0	−
$y_P\cdot y_Z$	+	0	−	0	−

方法二：如果 $y_Py_Z\leqslant0$，那么，情况1：$y_P\geqslant0$，$y_Z\leqslant0$，对应的图形是 $m\geqslant3$；情况2：$y_P\leqslant0$，$y_Z\geqslant0$，对应的图形是 $1\leqslant m\leqslant3$；综上所述，$m\geqslant1$.

（5）如图8，抛物线与直线围成的区域内有2个整点.

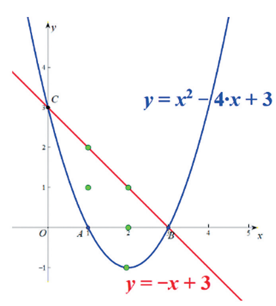

图8

【例题2】抛物线 $y=4x+3$ 与直线 $y=kx+3$（$k\neq0$）.

（1）（2020年密云一模改编）如图9，直线 $y=kx+3$（$k\neq0$）与抛物线 $y=x^2-4x+3$ 的另一个交点是 $E(x_E,y_E)$，如果 $3\leqslant x_E\leqslant3.5$，求 k 的取值范围；

（2）（2021年海淀期末改编）如图10，直线 $x=m$ 分别交抛物线、直线于 P,Z，只有当 $m\geqslant3$ 时，才有 $y_Py_Z\leqslant0$，求 k 的值；

（3）（2020年西城二模改编）如图11，直线 $x=m$ 分别交抛物线、直线于 P,Z，如果存在 m，使得 P,Z 均在 x 轴的下方，结合图象，求 k 的取值范围；

（4）（常见类型题）如图12，抛物线与直线围成的区域内有1个整点，求 k 的范围.

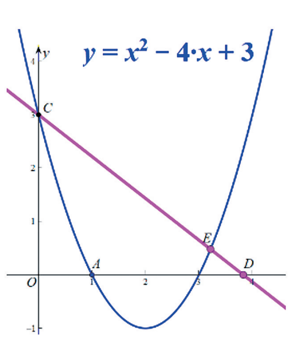

图9

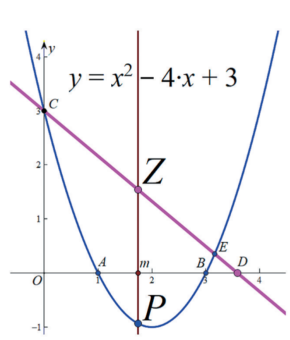

图10

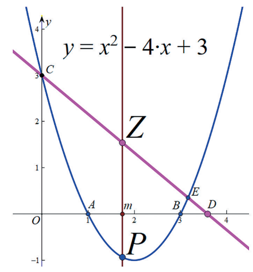

图11

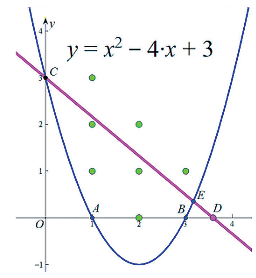

图12

【解】（1）如图13，

当 $x_E=3$ 时，$y_E=0$，此时 $k=-1$；

当 $x_E=3.5$ 时，$y_E=\frac{5}{4}$，此时 $k=-\frac{1}{2}$；

$\therefore$ 当 $3\leqslant x_E\leqslant3.5$ 时，$-1\leqslant k\leqslant-\frac{1}{2}$.

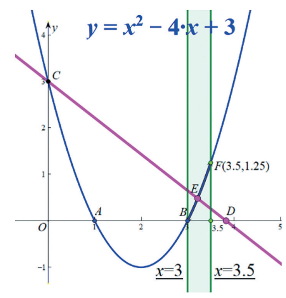

图13

（2）由题意设 $P(m,y_p)$、$Z(m,y_Z)$；

$\because$ 只有当 $m\geqslant3$ 时，$y_Py_Z\leqslant0$；$\therefore$ 当 $m<3$ 时，$y_Py_Z>0$. 所以可以列表梳理：

	$m<1$	$m=1$	$1<m<3$	$m=3$	$m>3$
y_P	+	0	−	0	+
$y_P\cdot y_Z$	+	0	+	0	−
y_Z	∴ +	?	∴ −	?	∴ −

如表格所示：当 $m<1$ 时，$y_Z>0$；当 $m>1$ 时，$y_Z<0$；$\therefore$ 当 $m=1$ 时，$y_Z=0$；

$\therefore$ 直线 $y=kx+3$（$k\neq0$）经过 $(1,0)$，$\therefore k=-3$.

（3）直线 $x=m$ 分别交抛物线、直线于 P,Z，如图14，对于抛物线，如果 $P(m,y_P)$ 在 x 轴的下方，即 $y_P<0$，那么 $1<m<3$；但是对于直线，如果 $Z(m,y_Z)$ 在 x 轴的下方，即 $y_Z<0$，那么需要求它与 x 轴的交点，并且要按 k 的正负分类讨论：

（i）当 $k<0$ 时，如图14，如果存在 m，使得 Z 在 x 轴的下方，那么 $m>x_D$；$\therefore m>x_D$ 要和 $1<m<3$ 有共同部分，$\therefore x_D<3$，而当 $D(3,0)$ 时，$k=-1$；$\therefore$ 如果要使得 $x_D<3$，那么 $k<-1$；

（ii）当 $k>0$ 时，如图15，如果存在 m，使得 T 在 x 轴的下方，那么 $k<-1$；

$\therefore m<x_D<0$ 要和 $1<m<3$ 有共同部分，但这与真实情况矛盾，所以舍去；

综上所述：$k<-1$.

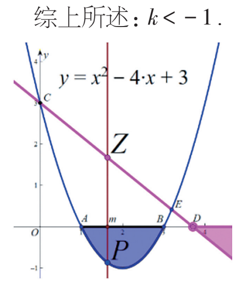

图14

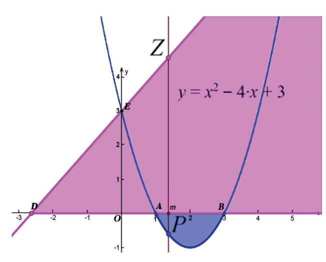

图15

（4）如果直线 $y=kx+3$（$k\neq0$）和抛物线围成的区域内有1个整点，那么极端情况是：

情况1：区域内、边界各有1个整点，如图16，$\therefore y=kx+3$ 经过 $(2,0)$，$\therefore k=-\frac{3}{2}$；

情况2：区域内、边界分别有0、1个整点，如图17，$\therefore y=kx+3$ 经过 $(1,1)$，$\therefore k=-2$；

$\therefore y=kx+3$（$k\neq0$）和抛物线围成的区域内有1个整点，那么 $-2<k\leqslant-\frac{3}{2}$.

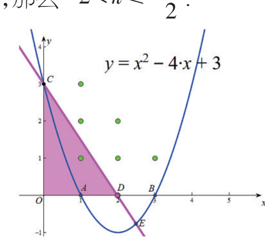

图16

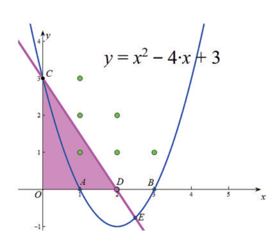

图17