数学

存在任意量词嵌套型命题的判定

北京大学附属中学 单治超

有时需要研究的命题里含有不止一个量词,这种现象叫做量词嵌套.例如,对于任意一个实数,都存在大于它的实数,这个命题里就含有两个量词.如果用符号化表示应为 $\forall x\in R,\ \exists y\in R,\ y>x$.这是一个真命题,考生要注意量词的顺序一般来说不能调换.如果调换顺序为 $\exists y\in R,\forall x\in R,\ y>x$.它的含义是存在一个实数比任意实数都大,这是一个假命题.一般来说,存在量词放在全称量词之前,命题更强;全称量词放在存在量词之前,命题更弱.

对含有量词的命题取否定时,存在量词和全称量词互换,这也适用于量词嵌套的情形.例如,$\forall x\in R,\ \exists y\in R,\ y>x$ 的否定是 $\exists x\in R,\ \forall y\in R,\ y\leqslant x$;$\exists y\in R,\ \forall x\in R,\ y>x$ 的否定是 $\forall x\in R,\ \exists y\in R,\ y\leqslant x$.

近年来,北京市高考数学试卷中多次出现量词嵌套型命题的判定,值得考生关注.

【例1】(2020年高考第21题)已知 $\{a_n\}$ 是无穷数列.给出两个性质:

① 对于 $\{a_n\}$ 中任意两项 $a_i,a_j(i>j)$,在 $\{a_n\}$ 中都存在一项 a_m,使 $\frac{a_i^2}{a_j}=a_m$;

② 对于 $\{a_n\}$ 中任意项 $a_n(n\geqslant 3)$,在 $\{a_n\}$ 中都存在两项 $a_k,a_l(k>l)$.使得 $a_n=\frac{a_k^2}{a_l}$.

(Ⅰ)若 $a_n=n(n=1,2,\cdots)$,判断数列 $\{a_n\}$ 是否满足性质①,说明理由;

(Ⅱ)若 $a_n=2^{n-1}(n=1,2,\cdots)$,判断数列 $\{a_n\}$ 是否同时满足性质①和性质②,说明理由.

【解析】(Ⅰ)中的 $\{a_n\}$ 不满足性质①,事实上要证①的否定:$\{a_n\}$ 中存在两项 $a_i,a_j(i>j)$,使得 $\{a_n\}$ 中任意一项 a_m,$\frac{a_i^2}{a_j}\neq a_m$.

证明:$a_3=3,\ a_2=2$,$\frac{a_3^2}{a_2}=\frac{9}{2}$ 不是整数,从而 $\{a_n\}$ 中任意一项 a_m,$\frac{a_3^2}{a_2}\neq a_m$.

作为存在量词在前,全称量词在后的量词嵌套型命题的判定,这个证明具有典型性.

(Ⅱ)中的 $\{a_n\}$ 同时满足性质①和②.

证明:对于 $\{a_n\}$ 中任意两项 $a_i=2^{i-1}$,$a_j=2^{j-1}(i>j)$,在 $\{a_n\}$ 中都存在一项 $a_{2i-j}=2^{2i-j-1}$,使 $\frac{a_i^2}{a_j}=a_{2i-j}$.

对于 $\{a_n\}$ 中任意项 $a_n=2^{n-1}(n\geqslant 3)$,在 $\{a_n\}$ 中都存在两项 $a_{n-1}=2^{n-2}$,$a_{n-2}=2^{n-3}$.使得 $a_n=\frac{a_{n-1}^2}{a_{n-2}}$.

作为全称量词在前,存在量词在后的量词嵌套型命题的判定,这个证明具有典型性.

【例2】(2022年高考第21题)已知 Q:$a_1,a_2,\cdots,a_k$ 为有穷整数数列.给定正整数 m,若对任意的 $n\in\{1,2,\cdots,m\}$,在 Q 中存在 $a_i,a_{i+1},a_{i+2},\cdots,a_{i+j}$ $(j\geqslant 0)$,使得 $a_i+a_{i+1}+a_{i+2}+\cdots+a_{i+j}=n$,则称 Q 为m−连续可表数列.

(1)判断 Q:2,1,4是否为5−连续可表数列?是否为6−连续可表数列?说明理由.

【解析】 $a_2=1,a_1=2,a_1+a_2=3,a_3=4,a_2+a_3=5$,所以 Q 是5−连续可表数列.

Q 是5−连续可表数列事实上是一个全称量词在前,存在量词在后的命题.由于全称量词约束的变量 n 只有5种可能取值,所以采用枚举法逐一判断存在性.

$a_i+a_{i+1}+\cdots+a_{i+j}(j\geqslant 0)$ 只有 $a_1,a_2,a_3,a_1+a_2,a_1+a_3,a_2+a_3,a_1+a_2+a_3$ 这7种可能取值,因此任意 i,j 使得 $a_i+a_{i+1}+\cdots+a_{i+j}\neq 6$,所以 Q 不是6−连续可表数列.

全称量词约束的变量可能取值数目很少时,采用枚举法不失为一种好的选择.

【例3】(2023年高考第10题)已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=\frac{1}{4}(a_n-6)^3+6(n=1,2,3,\cdots)$,则( )

A.当 $a_1=3$ 时,$\{a_n\}$ 为递减数列,且存在常数 $M\leqslant 0$,使得 $a_n>M$ 恒成立

B.当 $a_1=5$ 时,$\{a_n\}$ 为递增数列,且存在常数 $M\leqslant 6$,使得 $a_n<M$ 恒成立

C.当 $a_1=7$ 时,$\{a_n\}$ 为递减数列,且存在常数 $M>6$,使得 $a_n>M$ 恒成立

D.当 $a_1=9$ 时,$\{a_n\}$ 为递增数列,且存在常数 $M>0$,使得 $a_n<M$ 恒成立

【解析】选项中的表述"存在常数 $M\leqslant 0$,使得 $a_n>M$ 恒成立"可以等价地表述为"存在常数 $M\leqslant 0$,任意 $n\in N_+$,$a_n>M$ ",因此是存在量词在前,任意量词在后的命题.学过数列有界性概念的考生会知道,这几个选项就是在刻画数列的有界性.

令 $f(x)=\frac{1}{4}x^3$,则 $a_{n+1}-6=f(a_n-6)$.易见 $x<-2$ 或 $0<x<2$ 时,$f(x)<x$;$-2<x<0$ 或 $x>2$ 时,$f(x)>x$.

对于A选项,当 $a_1=3$ 时,$a_1-6<-2$,利用数学归纳法,对任意 $n\in N_+$,$a_n-6<-2$,$a_{n+1}-6=f(a_n-6)<a_n-6$,从而 $\{a_n\}$ 为递减数列.且对任意 $n\in N_+$,$a_n-6\leqslant -3$,所以 $a_{n+1}-6=\frac{(a_n-6)^2}{4}(a_n-6)\leqslant\frac{9}{4}(a_n-6)$,$a_n-6\leqslant -3(\frac{9}{4})^{n-1}$.于是不存在常数 $M\leqslant 0$,使得 $a_n>M$ 恒成立.A选项不正确.(思路:a_n-6 小于等于一个趋于负无穷大的等比数列,因此不可能有下界).

对于B选项,当 $a_1=5$ 时,$a_1-6\in(-2,0)$,利用数学归纳法,对任意 $n\in N_+$,$a_n-6\in(-2,0)$,$a_{n+1}-6=f(a_n-6)>a_n-6$,从而 $\{a_n\}$ 为递增数列.对任意 $n\in N_+$,$a_n<6$,于是存在常数 $M\leqslant 6$,使得 $a_n<M$ 恒成立.B选项正确.(思路:B选项在4个选项中难度最低,恰好又是正确选项,为选出正确答案提供了便利).

对于C选项,当 $a_1=7$ 时,$a_1-6\in(0,2)$,利用数学归纳法,对任意 $n\in N_+$,$a_n-6\in(0,2)$,$a_{n+1}-6=f(a_n-6)<a_n-6$,从而 $\{a_n\}$ 为递减数列.且对任意 $n\in N_+$,$a_n-6\in(0,1]$,所以 $a_{n+1}-6=\frac{(a_n-6)^2}{4}(a_n-6)\leqslant\frac{1}{4}(a_n-6)$,$a_n-6\leqslant(\frac{1}{4})^{n-1}$.于是不存在常数 $M>6$,使得 $a_n>M$ 恒成立.C选项不正确.(思路:a_n-6 小于等于一个趋于0的等比数列,因此 a_n 趋于6,不可能有大于6的下界).

对于D选项,当 $a_1=9$ 时,$a_1-6>2$,利用数学归纳法,对任意 $n\in N_+$,$a_n-6>2$,$a_{n+1}-6=f(a_n-6)>a_n-6$,从而 $\{a_n\}$ 为递增数列.且对任意 $n\in N_+$,$a_n-6\geqslant 3$,所以 $a_{n+1}-6=\frac{(a_n-6)^2}{4}(a_n-6)\geqslant\frac{9}{4}(a_n-6)$,$a_n-6\geqslant 3(\frac{9}{4})^{n-1}$.于是不存在常数 $M\leqslant 0$,使得 $a_n>M$ 恒成立.D选项不正确.(思路:a_n-6 大于等于一个趋于正无穷大的等比数列,因此不可能有上界).

本题中的数列 $\{a_n\}$ 以递推数列的形式给出,为了研究它的性质,需要与"好数列"等比数列作比较,解题过程中体现了很强的极限意识.本题在选择题中属于难度较大的题目.

【例4】(2023年朝阳区"二模"第15题节选)

斐波那契数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=a_2=1$,$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}(n\geqslant 3,n\in N^*)$,判断:存在常数 t,使得对任意 $n\in N^*$,都有 a_n,ta_{n+2},a_{n+4} 成等差数列.

【解析】这是一个存在量词在前,全称量词在后的命题.关键点在于找出 t.由于后面的 n 是被全称量词限制的,考生可以令 $n=1$,要想 a_1,ta_3,a_5 成等差数列,t 只可能等于 $\frac{3}{2}$.再去验证是否对任意 $n\in N^*$,都有 $a_n,\frac{3}{2}a_{n+2},a_{n+4}$ 成等差数列即可.

事实上,解析几何中的定值问题,都可以视为存在量词在前,全称量词在后的命题.利用特殊位置或对称性先猜出定值,再对一般情形严格论证,思路与本题类似.

【例5】(2023年朝阳区高三期中考试第15题节选)

已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的无穷数列,其前 n 项和为 S_n,且 $\frac{1}{a_n}+\frac{1}{S_n}=1\ (n\in N^*)$.判断:

③对任意的 $n\in N^*$,都有 $a_n\leqslant 1+\frac{1}{n}$;

④存在常数 $A>1$,使得对任意的 $n\in N^*$,都有 $a_n>A$.

【解析】③:$\{a_n\}$ 各项均为正数,所以 $\{S_n\}$ 各项均为正数且递增,又 $\frac{1}{a_n}+\frac{1}{S_n}=1$,所以 $\{a_n\}$ 递减.因此 $S_n\geqslant na_n$,$1=\frac{1}{a_n}+\frac{1}{S_n}\leqslant\frac{1}{a_n}+\frac{1}{na_n}$,$a_n\leqslant 1+\frac{1}{n}$.

④:假设存在常数 $A>1$,使得对任意的 $n\in N^*$,都有 $a_n>A$.根据③,对任意的 $n\in N^*$,都有 $A<1+\frac{1}{n}$,从而 $A\leqslant 1$,矛盾.

④是存在量词在前,全称量词在后的命题.考生通过反证法判断它为假,因此也就不需要把它的否定明确写出来.反证法在判断量词嵌套型命题的真假时是常用方法.

责编/胡梦蝶 版式/罗京京 热线/82837146 邮箱/kaoshibao@bjeea.cn