

导数专题复习常用策略

东北师范大学附属中学朝阳学校教师 唐大友

(续5月25日第1637期)

3. 借助函数图象解决导数问题

根据具体问题情境,借助函数图象与导函数的图象,思考导函数图象刻画函数性质与函数图象描述函数性质的对应关系,合理分析,明确解决问题思路,就能收到柳暗花明的效果。

【例9】已知函数 $f(x) = x^3 - x$ 。

(1)求曲线 $y = f(x)$ 在点 $M(t, f(t))$ 处的切线方程;

(2)设 $a > 0$, 如果过点 (a, b) 可作曲线 $y = f(x)$ 的三条切线, 证明: $-a < b < f(a)$ 。

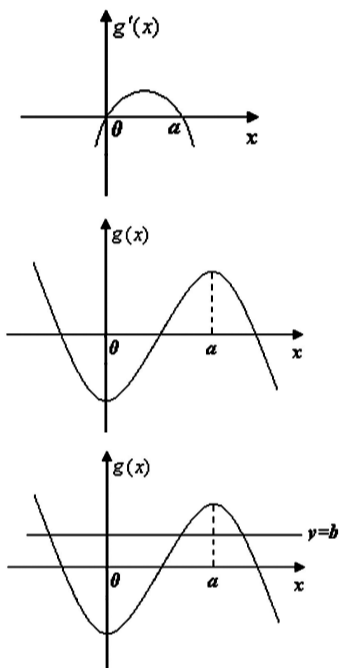
【解析】

(1)解:略

(2)证明:设切点 (x_0, y_0) , 则有 $3x_0^2 - 1 = \frac{y_0 - b}{x_0 - a}$, 即 $3x_0^2 - 1 = \frac{x_0^3 - x_0 - b}{x_0 - a}$,

所以 $-2x_0^3 + 3x_0^2 a - a = b$ (*). 构造函数 $g(x) = -2x^3 + 3x^2 a - a, y = b$ 。

则 $g'(x) = -6x^2 + 6ax = -6x(x - a)$ (已知 $a > 0$), 由二次函数 $g'(x)$ 易得 $x = 0$ 是函数 $g(x)$ 的一个极小值点, $x = a$ 是函数 $g(x)$ 的一个极大值点。



若过点 (a, b) 可作曲线 $y = f(x)$ 三条切线, 则方程 (*) 有三个不等实根, 如上图所示, 直线 $y = b$ 与函数 $g(x)$ 的图象有三个不同的交点, 所以 $g(0) < b < g(a)$, 因 $g(0) = -a, g(a) = -2a^3 + 3a^3 - a = a^3 - a = f(a)$, 所以有 $-a < b < f(a)$ 。

【点评】作答本题, 先构造函数 $g(x)$, 再呈现函数 $g(x)$ 与 $g'(x)$ 的图象, 可增强解决问题的直观性。

三、导数综合问题解法举例

【例10】已知函数 $f(x) = 2 \ln x - x - \ln a, a > 0$ 。

(I)求曲线 $y = f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(II)求函数 $f(x)$ 的极大值;

(III)设 $g(x) = ae^x - x^2$, 当 $a \in (1, e)$ 时, 求函数 $g(x)$ 的零点个数, 并说明理由。

【解析】

(I) $f(x)$ 定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{2-x}{x}, f'(1) = 1$, 且 $f(1) = -1 - \ln a$, 所以曲线 $y = f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y - (-1 - \ln a) = x - 1$, 即 $x - y - 2 - \ln a = 0$ 。

(II) $f(x) = 2 \ln x - x - \ln a$, 则 $f'(x) = \frac{2-x}{x}$. 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 2$. 当 $0 < x < 2$ 时, $f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增; 当 $x > 2$ 时, $f'(x) < 0, f(x)$ 单调递减. 所以函数 $f(x)$ 的极大值为 $f(2) = \ln \frac{4}{ae^2}$ 。

(III) $g'(x) = ae^x - 2x (1 < a < e)$, 当 $x \in (-\infty, 0]$ 时, $g'(x) > 0$, 所以函数 $g(x)$ 在 $x \in (-\infty, 0]$ 时单调递增, 而 $g(0) = a > 0, g(-1) = \frac{a}{e} - 1 < 0$. 所以方程 $g(x) = 0$ 在 $x \in (-1, 0)$ 时有且只有一个根, 即方程 $g(x) = 0$ 在 $x \in (-\infty, 0]$ 时有且只有一个根. 当 $x > 0$ 时, 讨论函数 $g(x)$ 的零点个数即讨论方程 $ae^x = x^2$ 根的个数, 因 $ae^x = x^2 > 0$, 两端取自然对数, 即研究方程 $\ln a + x = 2 \ln x (1 < a < e, x > 0)$ 的根的个数, 即研究函数 $f(x) = 2 \ln x - x - \ln a (1 < a < e, x > 0)$ 的零点个数. 当 $1 < a < e$ 时, $ae^2 > e^2, f(2) = \ln \frac{4}{ae^2} < \ln \frac{4}{e^2} < 0$, 则函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上无零点。

综上, 当 $a \in (1, e)$ 时, 函数 $g(x)$ 有且仅有一个零点。

【点评】本题是一道综合性很强的导数问题, 既考查了导数部分的核心内容, 又考查了考生灵活解决导数综合的能力, 还呈现了三问之间的关联性, 其实第(III)问中对等式两端取自然对数后即可变形为已知的函数 $f(x)$ 的解析式。

(续完)

高考作文 把握四个要点

北京市第五中学教师 朱香平

面对高考作文题目, 考生不要凭感觉, 要凭自己的实力和能力去写。根据题目要求, 有把握写记叙文的选记叙文, 没有把握的, 为稳妥起见, 可写议论文。

一、审题构思求稳求准

考生审题不可求快, 要耐心细致研读材料, 逐字逐句看清楚题目的要求、指向。不要贸然仓促动笔, 因为方向不对, 速度越快错得越离谱。

审题时, 考生要看清是纯命题作文还是给材料作文。对于给材料作文, 要整体把握材料内容, 仔细审视自己的切入点是否在试题材料的范围内, 自己的观点是否有足够的高度、深度、广度、厚度和温度。确立论点和选择论据时, 要注意观点与材料的关联、材料与材料之间的关联。论证要注意历史与现实的关联, 由浅入深, 由表及里。

记叙文的切合题意, 要建立在审题核心概念及其内涵的深入理解基础上, 而不能几个常写的素材套作, 甚至全盘默写, 在末尾用“贴标签”

的形式“卒章显志”。

考生要尽力表现自己的写作才能。切入点可以小, 立意格局要大, 逻辑必须合理, 构思努力体现匠心。

碰到似曾熟悉的作文题, 考生切忌大喜过望, 马上把考前复习过的内容写到答卷纸上。考生要努力克服“捡到宝”的侥幸心理, 而应静下心来, 认真审题, 按部就班地构思和布局谋篇。不管高考作文题目的要求, 只是简单地默写以往写过的作文, 或者用以往写作练习中用过的材料生搬硬套, 会有失分风险。碰到出乎意料的材料, 更要沉着应对。考场上, 考生有稳定的情绪, 淡定的心理, 方能发挥出自己应有的水平。所以, 碰到难题不要发懵, 要有信心, 不着急, 做好自我调节, 力争有

好的发挥。

构思作文时, 考生可列一个简要提纲, 如果写议论文, 就把论点、论据、如何分段、前后逻辑先想清楚; 如果写记叙文, 则要牢记根据要求确定主题, 想好如何讲一个扣题的好故事。不要刚想到开头, 还没有通盘的构思, 就着急动笔写, 边写边构思容易产生混乱。有些考生担心写作的时间不够, 而不能对审题和构思投入足够的时间, 匆匆扫一眼题目内容就仓促动笔。这样做的效果往往不好。审题有偏差, 会造成“失之毫厘, 谬以千里”的后果。高考考场上时间宝贵, 写作文忌讳写到中途想另起“炉灶”, 一涂一画, 结果是白忙活一场, 还搞乱了卷面, 浪费了宝贵的时间, 更影响了情绪。

二、入题行文求快求显

考场作文有时间和字数限制。在具体行文中, 考生要注意巧妙切入, 快捷入题, 即把文章的主体内容尽快表现出来。入题较慢虽然不算离题, 但往往使整篇文章显得扣题不紧、中心不够突出。为此, 在写作文开头时, 考生可三言两语就进入材料范围, 表明观点, 为全文定下基调, 然后逐层展开。

写作要开门见山, 语言要精炼。考场作文最好不刻意追求含蓄、深沉, 如果写不好, 就会给人留下晦涩难懂的印象。一般来说, 考生写记叙文, 叙述的线索要清楚, 事件要集中, 不“漫天撒网”, 不“横生枝节”; 写议论文要扣住材料, 直奔主题, 干净利落。

有的考生写作文时爱兜圈子, 拐弯抹角, 让人读了半

天不知所云; 有的照抄大段题目材料; 有的把本来简洁的题目材料进行扩展; 有的开篇就摆材料, 古今中外, 东拉西扯, 而真正要写的内容却“千呼万唤不出来”。如果文章的开篇松散, 且占用了较大的篇幅, 而关键内容只能简写略写, 甚至一笔带过, 造成轻重倒置、比例失调, 那失分不可避免。

三、结构布局清晰合理

考生对文章整体的结构安排要心中有数。开头、结尾忌冗长、拖沓, 注意废话不可太多。

段落设置要合理。全篇可安排5至6段, 但要注意字数。要注意中心句、关键词的使用。

对材料作文, 考生写作时要注意体现材料。如所给材料较多, 要注意提炼概括。在论据素材的选择上, 要体现鲜明的时代性, 尽量选用近期鲜

活的、有较高知晓度的典型材料。对所使用的材料, 要及时展开分析阐述, 避免光举例不分析、以事例的堆砌替代论证等现象。全文最好能有一二句含有哲理意味的语句; 可引用几句名言名句。但要注意, 所引用的名言名句, 要紧扣文章主旨, 给人留下水到渠成的感觉, 切不可生搬硬套。要尽量做到文从字顺, 表达真切得体。

写作记叙文, 考生要思

考“从哪里开始讲故事”“故事以什么视角写更好”“如何在有限的篇幅内讲述有价值的故事”等, 会简笔速描刻画人物。行文要一波三折, 制造悬念; 要集中笔墨表现矛盾冲突, 且线索清晰; 情景转换要轻快自然; 注意描写的生动以及多种表达技巧的综合运用; 还要注意想象的合理性。记叙文的写作, 既要努力讲好故事, 也要力争讲立意高的故事。

四、细节之处不容忽视

考生在考场上写作文还要注意一些细节: 作文标题居中; 每段段首空两格; 字的大小匀称, 字迹清楚, 笔画清晰; 字数

达到规定要求; 标点的使用和书写规范; 整个卷面整洁。

考生写作文要避免缺少题目、字数不够、出现错别字、

篇章不完整等问题; 也要避免观点偏激和错误、内容重心把握不当、观点过于晦涩、脉络和逻辑混乱等问题。